四面体 ABCD において，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$，$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$ が成り立っている．三角形 ABC の重心を G とする．

(1) $\angle\mathrm{BDC}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}}$ の値を求めよ．

(20 千葉大 5)

【答】

(1) $\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$

(2) $\dfrac{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}}=3$

【解答】

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{c}$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2&=|\vec{b}-\vec{a}|^2+|-\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b} \qquad \cdots\cdots ③\\ \mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2&=|\vec{c}-\vec{b}|^2+|-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}\\ \mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2&=|\vec{c}-\vec{a}|^2+|-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

であるから

$$\text{「① かつ ②」} \iff \begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad \cdots\cdots ②'\end{cases}$$

$$\iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

である．$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ より

$$\angle\mathrm{BDC}=\mathbf{90^\circ} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) ③，②′ より

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

である．また，G は三角形 ABC の重心であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{DG}}|^2&=\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2\\ &=\frac{1}{9}\left\{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\right\}\\ &=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\right) \quad (\because ④)\end{aligned}$$

である．よって

$$\frac{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}}=\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2}}{\frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2}}=\mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．