座標空間内の2点O(0, 0, 0)，A(1, -1, 2) を通る直線を l_1 とし，2点B(-2, 0, 0)，C(0, 2, 0) を通る直線を l_2 とする

(1) l_1 と l_2 が交わらないことを証明せよ．

(2) 点Pが l_1 上を動き，点Qが l_2 上を動く．2点P，Q間の距離が最小となるときのP，Qの座標と，その距離を求めよ．

(20 津田塾大 学芸 2)

【答】

(1) 略

(2) $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$, Q($-1$, 1, 0) のとき，距離PQは最小値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【解答】

(1) 2点O(0, 0, 0)，A(1, -1, 2) を通る直線 l_1 上の点Pは実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= s(1,\ -1,\ 2)\\ &= (s,\ -s,\ 2s)\end{aligned}$$

と表すことができる．同様に，2点B(-2, 0, 0)，C(0, 2, 0) を通る直線 l_2 上の点Qは実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= (-2,\ 0,\ 0) + t(2,\ 2,\ 0)\\ &= (-2+2t,\ 2t,\ 0)\end{aligned}$$

と表すことができる．

直線 l_1，l_2 が交わると仮定すると

$$\begin{cases} s = -2+2t & \cdots\cdots ① \\ -s = 2t & \cdots\cdots ② \\ 2s = 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を満たす実数 s, t が存在する．② と ③ から

$$s = t = 0$$

となるが，これは，① を満たさない．

よって，直線 l_1 と l_2 は交わらない． ……(証明終わり)

(2) (1) の s, t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-s+2t-2,\ s+2t,\ -2s)$$

と表すことができる．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= (-s+2t-2)^2 + (s+2t)^2 + (-2s)^2\\ &= (s^2+4t^2+4-4st-8t+4s) + (s^2+4st+4t^2) + 4s^2\\ &= 6s^2+8t^2+4s-8t+4\\ &= 6\left(s+\frac{1}{3}\right)^2 + 8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ は $s = -\dfrac{1}{3}$, $t = \dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち

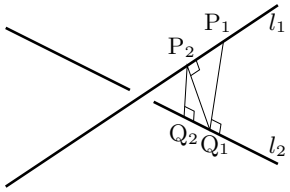
$$\mathbf{P}\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\ \mathbf{Q(-1,\ 1,\ 0)}$$ ……(答)

のとき，距離PQは

$$\textbf{最小直}\quad \frac{2\sqrt{3}}{3}$$ ……(答)

をとる．

- l_1 上に点 P_1 をとり l_2 に垂線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ を引き，Q_1 から l_1 に垂線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ を引く．この操作を繰り返すと



$$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 > \mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2 > \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2 > \cdots$$

であるから，共通垂線 PQ が存在するならば，l_1, l_2 の最短距離は線分 PQ の長さである．

本問では

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\end{cases}$$

を満たす $\mathrm{P}(s,\ -s,\ 2s)$，$\mathrm{Q}(-2+2t,\ 2t,\ 0)$ が存在すること，すなわち

$$\begin{cases}(-s+2t-2,\ s+2t,\ -2s)\cdot(1,\ -1,\ 2)=0\\ (-s+2t-2,\ s+2t,\ -2s)\cdot(2,\ 2,\ 0)=0\end{cases}$$

を満たす s, t の存在を確認する．

$$\begin{cases}(-s+2t-2)-(s+2t)-4s=0\\ 2(-s+2t-2)+2(s+2t)+0=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-6s-2=0\\ 8t-4=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad s=-\frac{1}{3},\quad t=\frac{1}{2}$$

s, t の存在が確認された．よって，距離 PQ は

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\ \mathrm{Q}(-1,\ 1,\ 0)\text{ のとき，最小直}\quad\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

をとる．

- $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}-s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とおくと，R は点 B を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な平面 π 上の点である．$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ が最小となるのは，R が O から π に下ろした垂線の足と一致するときである．

$$\begin{cases}\mathrm{OR}\perp\mathrm{OA}\\ \mathrm{OR}\perp\mathrm{BC}\end{cases}\iff\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\end{cases}$$

以後，上と同じ．

最小値のみならば，正射影ベクトルを用いることができる．すなわち，π の法線ベクトルの一つを $\vec{n}$ とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ の最小値は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\vec{n}$ への正射影ベクトルの大きさに等しい．$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ -1,\ 2)$ に垂直なベクトルの一つとして $\vec{n}=(1,\ -1,\ -1)$ をとることができるから

$$\begin{aligned}(|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\text{ の最小値})&=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right|=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}\\ &=\frac{|(-2,\ 0,\ 0)\cdot(1,\ -1,\ -1)|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|-2+0+0|}{\sqrt{1+1+1}}\\ &=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

である．