整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると 1 余り，$x-2$ で割ると 2 余る．このとき，$P(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余り $R(x)$ を求めなさい．

(21 兵庫県大 中・情報 1(2))

---

【答】 $x^2-2x+2$

---

【解答】

$P(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余り $R(x)$ を $ax^2+bx+c$ とおくと

$$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

である．さらに，$ax^2+bx+c$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを $dx+e$ とおくと

$$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+dx+e$$

であるから

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+dx+e\\&=(x-1)^2\{(x-2)Q(x)+a\}+dx+e\end{aligned}$$

である．$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは 1 であるから

$$d=0 \quad e=1$$

このとき

$$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+1 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．また，$P(x)$ を $x-2$ で割った余りは 2 であるから

$$P(2)=2 \quad (\because \text{ 剰余の定理})$$

$$\therefore \quad a\cdot 1^2+1=2 \qquad \therefore \quad a=1$$

よって，① は

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)^2(x-2)Q(x)+1\cdot(x-1)^2+1\\&=(x-1)^2(x-2)Q(x)+x^2-2x+2\end{aligned}$$

となり，求める余り $R(x)$ は

$$R(x)=\boldsymbol{x^2-2x+2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 積の微分 (数学 III) を利用することもできる．

  $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると 1 余るから

  $$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+1$$
  $$P'(x)=2(x-1)\cdot Q_1(x)+(x-1)^2\cdot Q'(x)$$

  であり

  $$P(1)=1\cdots\cdots ㋐ \text{ かつ } P'(1)=0 \cdots\cdots ㋑$$

  さらに，$x-2$ で割ると 2 余るから

  $$P(2)=2 \cdots\cdots ㋒$$

  が成り立つ．

また，$P(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax^2+bx+c$ とおくと

$$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

であり

$$P'(x)=2(x-1)\cdot(x-2)Q(x)+(x-1)^2\cdot\{(x-2)Q(x)\}'+2ax+b$$

であるから

$$\begin{cases} ㋐ : a+b+c=1 \\ ㋑ : 2a+b=0 \\ ㋒ : 4a+2b+c=2 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-2a \\ a+(-2a)+c=1 \\ 4a+2(-2a)+c=2 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-2a \\ -a+c=1 \\ c=2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a=1,\ b=-2= \ c=2$$

求める余りは $x^2-2x+2$ である．