

等式 $x^2 = a + b(x-1) + c(x-1)^2$ が x についての恒等式となるように、定数 a , b , c の値を定めよ.

(21 茨城大 工 2(1))

【答】 $a = 1, b = 2, c = 1$

【解答】

$$x^2 = a + b(x-1) + c(x-1)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\text{右辺}) = cx^2 + (b-2c)x + (a-b+c)$$

よって、 $\textcircled{1}$ が x についての恒等式であるための条件は、係数を比較して

$$\begin{cases} 1 = c \\ 0 = b - 2c \\ 0 = a - b + c \end{cases}$$

$$\therefore a = 1, b = 2, c = 1$$

$\cdots \cdots$ (答)

である.

- 代入法を用いる.

$\textcircled{1}$ に $x = 1, 0, 2$ を代入すると

$$\begin{cases} 1 = a + 0 + 0 \\ 0 = a - b + c \\ 4 = a + b + c \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = 1 \\ b - c = 1 \\ b + c = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = 1, b = 2, c = 1 \quad (\text{必要})$$

このとき

$$\begin{aligned} (\textcircled{1} \text{の右辺}) &= 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 \\ &= 1 + 2(x-1) + (x^2 - 2x + 1) \\ &= x^2 \\ &= (\textcircled{1} \text{の左辺}) \end{aligned}$$

であり、 $\textcircled{1}$ は x についての恒等式である (十分).

よって、 $a = 1, b = 2, c = 1$ である.