等式 $\dfrac{2x^2+18x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{x-1}-\dfrac{c}{x+2}$ が x についての恒等式であるとき，定数 a, b, c の値は $a=$ $\boxed{\text{サ}}$, $b=$ $\boxed{\text{シ}}$, $c=$ $\boxed{\text{ス}}$ である．

(21 金沢工大 1(3))

【答】

サ	シ	ス
7	5	3

【解答】

右辺を通分すると

$$\begin{aligned}&\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}-\frac{c}{x+2}\\&=\frac{a(x+2)+b(x-1)(x+2)-c(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}\\&=\frac{(b-c)x^2+(a+b+2c)x+2a-2b-c}{(x-1)^2(x+2)}\end{aligned}$$

となる．左辺と右辺の分子は等しいから

$$2x^2+18x+1=(b-c)x^2+(a+b+2c)x+2a-2b-c$$

であり，与式が x の恒等式であるとき

$$\begin{cases}b-c=2\\a+b+2c=18\\2a-2b-c=1\end{cases}\iff\begin{cases}b=c+2\\a=16-3c\\2(16-3c)-2(c+2)-c=1\end{cases}$$

第 3 式より $c=3$ が得られ

$$\boldsymbol{a=7,\ b=5,\ c=3}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 与式の両辺に $(x-1)^2(x+2)$ をかけると

  $$2x^2+18x+1=a(x+2)+b(x-1)(x+2)-c(x-1)^2\qquad\cdots\cdots ㋐$$

  を得る．$x=0,\ 1,\ -2$ を代入すると

  $$\begin{cases}2a-2b-c=1\\3a=21\\-9c=-27\end{cases}\qquad\therefore\quad a=7,\ c=3,\ b=5$$

  である．
- 2 次の等式 ㋐ は，異なる 3 つの値に対して成り立つから，x についての恒等式である．