実数 $a,\ b$ に対して，3 次方程式 $2x^3+3x^2+ax-b=0$ の 1 つの解が i であるとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ．また，他の解を求めよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(21 宮城大 事業構想・食品業 1(3))

【答】 $a=2,\ b=-3$，他の解は $-i,\ -\dfrac{3}{2}$

【解答】

$$2x^3+3x^2+ax-b=0$$

実数係数の 3 次方程式なので，i が解のとき，$-i$ も解である．もう 1 つの解を α とすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases} i+(-i)+\alpha=-\dfrac{3}{2} \\ i\cdot(-i)+(-i)\cdot\alpha+\alpha\cdot i=\dfrac{a}{2} \\ i\cdot(-i)\cdot\alpha=\dfrac{b}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \alpha=-\dfrac{3}{2} \\ 1=\dfrac{a}{2} \\ \alpha=\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \alpha=-\frac{3}{2}, \quad \boldsymbol{a=2}, \quad \boldsymbol{b=-3}$$ ……(答)

また，他の解は $\boldsymbol{-i}$ **と** $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$ である． ……(答)

- 実数係数の 3 次方程式なので，i が解のとき，$-i$ も解なので，方程式の左辺は

$$(x-i)(x+i)=x^2+1$$

で割り切れる．

実際に割り算を行うと

$$\begin{array}{r|llll} & 2x & +3 & & \\ \hline x^2+1 & 2x^3 & +3x^2 & +ax & -b \\ & 2x^3 & & +2x & \\ \hline & & 3x^2 & +(a-2)x & -b \\ & & 3x^2 & & +3 \\ \hline & & & (a-2)x & -b-3 \end{array}$$

$$2x^3+3x^2+ax-b$$
$$=(x^2+1)(2x+3)+(a-2)x-b-3$$

となる．割り切れることから，(余り) $=0$ であり

$$\begin{cases} a-2=0 \\ -b-3=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=2,\ b=-3$$

他の解は，$-i$ と $-\dfrac{3}{2}$ である．

- i が解なので

$$2i^3+3i^2+ai-b=0$$
$$\therefore \quad -3-b+(-2+a)i=0$$

$a,\ b$ は実数なので

$$\begin{cases} -3-b=0 \\ -2+a=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=2,\ b=-3$$

与式に代入して

$$2x^3+3x^2+2x+3=0$$
$$\therefore \quad (2x+3)(x^2+1)=0$$

他の解は，$-i$ と $-\dfrac{3}{2}$ である．