a を実数とする．x の 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+a^2-1=0$ について，以下の問に答えよ．

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(2) a を (1) で求めた範囲で動かすとき，この 2 次方程式の実数解がとりうる値の範囲を求めよ．

(21 神戸大 後 理系 4)

【答】

(1) $-1<a<\dfrac{5}{3}$

(2) $-2 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}$

【解答】

$$x^2+(a+1)x+a^2-1=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) x の 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつための条件は，判別式を D_x とおくと，$D_x>0$ である．

$$D_x=(a+1)^2-4(a^2-1)=-3a^2+2a+5=-(a+1)(3a-5)$$

であるから，求める条件は

$$\boldsymbol{-1<a<\frac{5}{3}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad\qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) a が範囲 ① を動くときの $(*)$ の実数解 x のとりうる値の範囲は，$(*)$ を満たす a が範囲 ① に存在するような x の値の集合である．

$(*)$ を a について整理すると

$$(*) \iff a^2+xa+x^2+x-1=0$$

$f(a)=a^2+xa+x^2+x-1$ とおき，$f(a)=0$ が範囲 ① に少なくとも一つ解をもつための x の条件を求める．

$f(a)=0$ の判別式を D_a とおくと

$$D_a=x^2-4(x^2+x-1)=-3x^2-4x+4=-(x+2)(3x-2)$$

であるから，$f(a)=0$ が実数解をもつための条件 $D_a \geqq 0$ は

$$-2 \leqq x \leqq \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．② のとき，$y=f(a)$ の軸 $a=-\dfrac{x}{2}$ は

$$-\frac{1}{2}\cdot(-2) \geqq -\frac{x}{2} \geqq -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} \qquad \therefore \quad -\frac{1}{3} \leqq -\frac{x}{2} \leqq 1$$

軸は ① の範囲にある．また，端点の符号については

$$f(-1)=x^2 \geqq 0$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=x^2+\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}=\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 \geqq 0$$

$f(-1)$, $f\left(\dfrac{5}{3}\right)$ が同時に 0 となることはないから，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{5}{3}\right)$ の少なくとも一方は正であり，$f(a)=0$ を満たす a が範囲 ① に少なくとも一つ存在する．

よって，x のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ax 平面上で

$$x^2+(a+1)x+a^2-1=0$$

を満たす点 $(a,\ x)$ の集合は右の太線となる．

(1)，(2) の範囲はこの図から読み取ることができる．