a，b が正の数であるとき，a，b の相加平均は a，b の相乗平均以上であることを示せ．さらに，等号が成立するための条件を求めよ．

(21 三重大 医 (看)・教育・生資・人文 1(1))

【答】 証明略．等号が成立するための条件 $a = b$.

【解答】

a，b の相加平均 $\dfrac{a+b}{2}$ と a，b の相乗平均 $\sqrt{ab}$ の差をとると

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \quad (\because\ a > 0,\ b > 0) \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqq 0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \qquad \cdots\cdots \text{(証明終わり)}$$

が成り立つ．さらに，等号が成立するのは

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \text{ すなわち } \boldsymbol{a = b} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

のときである．

- $a < 0,\ b < 0$ のときは，$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ は成り立たない．
  例えば：$a = -1,\ b = -2$ のとき

  $$\sqrt{ab} = \sqrt{(-1)(-2)} = \sqrt{2},$$
  $$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{-1}\sqrt{-2} = i \cdot (i\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

  であり，$\sqrt{ab} \fallingdotseq \sqrt{a}\sqrt{b}$ である．