k, x, y, z を実数とする．k が以下の (1), (2), (3) のそれぞれの場合に，不等式

$$x^2+y^2+z^2+k(xy+yz+zx) \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．また等号が成り立つのはどんな場合か．

(1) $k=2$

(2) $k=-1$

(3) $-1<k<2$

(21 神戸大 文 2)

【答】

(1) 証明略．等号が成り立つのは $x+y+z=0$ のとき．

(2) 証明略．等号が成り立つのは $x=y=z$ のとき．

(3) 証明略．等号が成り立つのは $x=y=z=0$ のとき．

【解答】

$$x^2+y^2+z^2+k(xy+yz+zx) \geqq 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) $k=2$ のとき

$$\begin{aligned}((*)\text{ の左辺}) &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\\ &= (x+y+z)^2\\ &\geqq 0 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

等号が成り立つのは，$\boldsymbol{x+y+z=0}$ のときである．……(答)

(2) $k=-1$ のとき

$$\begin{aligned}((*)\text{ の左辺}) &= x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\\ &= \frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)\\ &= \frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\\ &\geqq 0 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

等号が成り立つのは，$\begin{cases} x-y=0\\ y-z=0\\ z-x=0 \end{cases}$ すなわち，$\boldsymbol{x=y=z}$ のときである．……(答)

- 1 つの文字について式を整理する．

$$\begin{aligned}((*)\text{ の左辺}) &= x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\\ &= x^2-(y+z)x+y^2-yz+z^2\\ &= \left(x-\frac{y+z}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{2}yz+\frac{3}{4}z^2\\ &= \left(x-\frac{y+z}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-z)^2\\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

等号が成り立つのは，$\begin{cases} x-\dfrac{y+z}{2}=0\\ y-z=0 \end{cases}$ すなわち，$x=y=z$ のときである．

(3) $$f(k)=(xy+yz+zx)k+x^2+y^2+z^2$$

とおく．$Y=f(k)$ は kY 平面において，傾き $xy+yz+zx$ の直線を表す．

$-1<k<2$ において

$xy+yz+zx<0$ ならば，$f(k)>f(2)\geqq 0\quad (\because\ (1))$
$xy+yz+zx>0$ ならば，$f(k)>f(-1)\geqq 0\quad (\because\ (2))$
$xy+yz+zx=0$ ならば，$f(k)=x^2+y^2+z^2\geqq 0$

いずれのときも

$$f(k)\geqq 0$$ ……(証明終わり)

が成り立つ．また，等号が成り立つのは

$$\begin{cases} xy+yz+zx=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \end{cases}\quad \text{すなわち，}\quad \boldsymbol{x=y=z=0}$$ ……(答)

のときである．

- 1 つの文字について整理する．

$$\begin{aligned}
&((*)\text{ の左辺}) \\
&=x^2+k(y+z)x+y^2+z^2+kyz \\
&=\left\{x+\frac{k}{2}(y+z)\right\}^2-\frac{k^2}{4}(y+z)^2+y^2+z^2+kyz \\
&=\left\{x+\frac{k}{2}(y+z)\right\}^2+\frac{4-k^2}{4}y^2+\frac{2k-k^2}{2}zy+\frac{4-k^2}{4}z^2 \\
&=\left\{x+\frac{k}{2}(y+z)\right\}^2+\frac{4-k^2}{4}\left(y+\frac{k}{2+k}z\right)^2-\frac{(2-k)k^2}{4(2+k)}z^2+\frac{4-k^2}{4}z^2 \\
&=\left\{x+\frac{k}{2}(y+z)\right\}^2+\frac{4-k^2}{4}\left(y+\frac{k}{2+k}z\right)^2+\frac{(2-k)(1+k)}{2+k}z^2
\end{aligned}$$

$-1<k<2$ より $4-k^2>0$，$\dfrac{(2-k)(1+k)}{2+k}>0$ であるから

$$((*)\text{ の左辺})\geqq 0$$

が成り立つ．また，等号が成り立つのは

$$\begin{cases} x+\dfrac{k}{2}(y+z)=0 \\ y+\dfrac{k}{2+k}z=0 \\ z=0 \end{cases}\quad \text{すなわち，}\quad x=y=z=0$$

のときである．