次の問いに答えよ．

(1) $a,\ b$ を実数とし，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ が実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつとする．ただし，重解の場合は $\alpha=\beta$ とする．3 辺の長さが $1,\ \alpha,\ \beta$ である三角形が存在する $(a,\ b)$ の範囲を求め図示せよ．

(2) 3 辺の長さが $1,\ \alpha,\ \beta$ である三角形が存在するとき，
$$\frac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2}$$
の値の範囲を求めよ．

(21 一橋大 3)

【答】

(1) 略

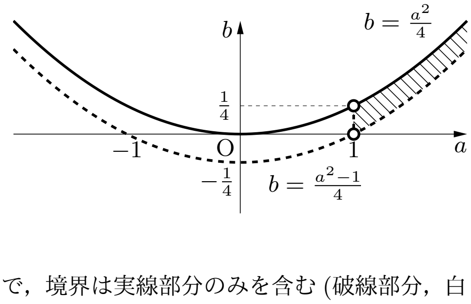
(2) $\dfrac{1}{4}<\dfrac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2}<\dfrac{5}{4}$

【解答】

(1) 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ が実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつ条件は，(判別式) $\geqq 0$ であり
$$a^2-4b\geqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$
である．さらに，3 辺の長さが $1,\ \alpha,\ \beta$ である三角形が存在する条件は

2 辺の長さの和は他の 1 辺の長さより大きい

すなわち
$$(*)\begin{cases}\alpha+\beta>1\\ \alpha+1>\beta\\ \beta+1>\alpha\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha+\beta>1\\ |\alpha-\beta|<1\end{cases}$$
である．
$$\alpha+\beta=a \quad (\because\ \text{解と係数の関係})$$
$$|\alpha-\beta|=\left|\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}-\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\right|=\sqrt{a^2-4b}$$
より
$$(*)\iff\begin{cases}a>1\\ \sqrt{a^2-4b}<1\end{cases}$$



である．① かつ $(*)$ を整理すると
$$\begin{cases}a>1\\ 0\leqq a^2-4b<1\end{cases}$$
$$\therefore\quad\begin{cases}a>1\\ \dfrac{a^2-1}{4}<b\leqq\dfrac{a^2}{4}\end{cases}$$
これを図示すると右図の斜線部分となる．ここで，境界は実線部分のみを含む (破線部分，白丸は含まない)．

- $(*)$ の $\alpha,\ \beta$ は長さなので正であることが前提になっているが，$(*)$ が成り立てば，$\alpha,\ \beta$ が正であることが示されるので，$\alpha,\ \beta$ を正とする条件は不要である．

一般の形で示しておく．

$$(*)\begin{cases} p+q>r & \cdots\cdots ㋐ \\ q+r>p & \cdots\cdots ㋑ \\ r+p>q & \cdots\cdots ㋒ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p>0 \\ q>0 \\ r>0 \end{cases}$$

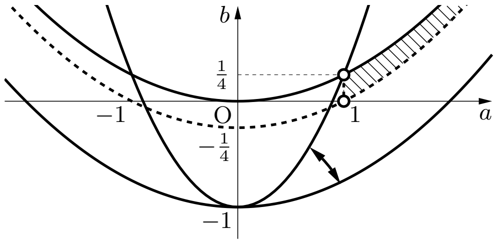
㋐，㋑より，$p+q>r>p-q \quad \therefore \quad p+q>p-q \quad \therefore \quad q>0$
㋑，㋒より，$q+r>p>q-r \quad \therefore \quad q+r>q-r \quad \therefore \quad r>0$
㋒，㋐より，$r+p>q>r-p \quad \therefore \quad r+p>r-p \quad \therefore \quad p>0$ (証明終わり)

(2) 解と係数の関係から

$$\frac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2}=\frac{b+1}{a^2}$$

であり，この値を k とおき，k のとり得る値の範囲を求める．

k のとり得る値の範囲は，$b=ka^2-1$ と (1) の領域が共有点をもつような k の値の範囲である．$b=ka^2-1$ は ab 平面において，点 $(0,-1)$ を頂点にもつ放物線である．



まず，(1) で求めた領域の境界線である放物線は，どちらも a^2 の係数が $\frac{1}{4}$ なので，$b=ka^2-1$ の a^2 の係数 k は $k>\frac{1}{4}$ であることが必要である．

また，放物線 $b=ka^2-1$ が点 $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$ を通るときの k の値は

$$\frac{1}{4}=k\cdot 1^2-1 \qquad \therefore \quad k=\frac{5}{4}$$

である．

よって，k の値の範囲は $\frac{1}{4}<k<\frac{5}{4}$ すなわち

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}<\frac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2}<\frac{5}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (1) の結果から

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{a^2-1}{4}+1}{a^2}<\dfrac{b+1}{a^2}\leqq\dfrac{\dfrac{a^2}{4}+1}{a^2} \\ a>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a^2+3}{4a^2}<\dfrac{b+1}{a^2}\leqq\dfrac{a^2+4}{4a^2} \\ a>1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4a^2}<\dfrac{b+1}{a^2}\leqq\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{a^2} \\ a>1 \end{cases}$$

が成り立つ．$a>1$ において

$\frac{1}{4}+\frac{3}{4a^2}$ のとり得る値の範囲は $\quad \frac{1}{4}<\frac{1}{4}+\frac{3}{4a^2}<1$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{a^2}$ のとり得る値の範囲は $\quad \frac{1}{4}<\frac{1}{4}+\frac{1}{a^2}<\frac{5}{4}$

なので，$\frac{b+1}{a^2}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{4}<\frac{b+1}{a^2}<\frac{5}{4}$$

である．