円と放物線，距離の最小値

a を正の実数とする．座標平面上の曲線 B_a と曲線 C を次のように定める．

$$B_a : y = -\frac{1}{a}x^2 + 2, \quad C : x^2 + y^2 = 1$$

以下の問いに答えよ．

(1) 点 P が曲線 B_a 上を動くとき，P と原点 O(0, 0) との距離の最小値を a を用いて表せ．

(2) 曲線 B_a と曲線 C が共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) 点 P が曲線 B_a 上を動き，点 Q が曲線 C 上を動くとき，P と Q との距離の最小値を a を用いて表せ．

(21 広島大 後 理 (数) 1)

【答】

(1) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{8a-a^2}}{2} & (0 < a < 4 \text{ のとき}) \\ 2 & (4 \leqq a \text{ のとき}) \end{cases}$

(2) $0 < a \leqq 4 - 2\sqrt{3}$

(3) $\begin{cases} 0 & (0 < a \leqq 4 - 2\sqrt{3} \text{ のとき}) \\ \dfrac{\sqrt{-a^2+8a}}{2} - 1 & (4 - 2\sqrt{3} < a < 4 \text{ のとき}) \\ 1 & (a \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$

【解答】

$$B_a : y = -\frac{1}{a}x^2 + 2, \quad C : x^2 + y^2 = 1$$

(1) B_a 上の点 P の座標を $\left(p,\ -\dfrac{1}{a}p^2 + 2\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}^2 &= p^2 + \left(-\frac{1}{a}p^2 + 2\right)^2 \\ &= \frac{1}{a^2}p^4 + \left(1 - \frac{4}{a}\right)p^2 + 4 \\ &= \frac{1}{a^2}\left\{p^2 + \frac{a(a-4)}{2}\right\}^2 + 4 - \frac{(a-4)^2}{4} \\ &= \frac{1}{a^2}\left\{p^2 - \frac{a(4-a)}{2}\right\}^2 + \frac{8a-a^2}{4} \qquad \cdots\cdots (*) \end{aligned}$$

$(*)$ を p^2 についての 2 次関数とみて，軸 $p^2 = -\dfrac{a(a-4)}{2}$ が定義域 $p^2 \geqq 0$ にあるか否かで場合分けして，最小値を求める．$a > 0$ に注意すると

(i) $\dfrac{a(4-a)}{2} > 0$ $(0 < a < 4)$ のとき：

$p^2 = \dfrac{a(4-a)}{2} (> 0)$ において，OP^2 は最小値 $\dfrac{8a-a^2}{4}$ をとる．

(ii) $\dfrac{a(4-a)}{2} \leqq 0$ $(a \geqq 4)$ のとき：

$p^2 = 0$ において，OP^2 は最小値 4 をとる．

以上 (i), (ii) より，OP の最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{8a-a^2}}{2}} & \textbf{(}\boldsymbol{0<a<4}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{2} & \textbf{(}\boldsymbol{4 \leqq a}\ \textbf{のとき)} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) B_a と C が共有点をもつ条件は，C が中心 O，半径 1 の円であることから

$$(\text{OP の最小値}) \leqq 1 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

である．(1) の結果から

(i) $0 < a < 4$ のとき

$$(*) \iff \frac{\sqrt{8a-a^2}}{2} \leqq 1 \iff a^2 - 8a + 4 \geqq 0$$

$$\therefore \quad a \leqq 4 - 2\sqrt{3} \text{ または } 4 + 2\sqrt{3} \leqq a$$

(i) の範囲とあわせると

$$0 < a \leqq 4 - 2\sqrt{3}$$

(ii) $a \geqq 4$ のときは

$$(\text{OP の最小値}) = 2 > 1$$

であり，$(*)$ は成り立たない．

(i), (ii) より，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{0 < a \leqq 4 - 2\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (1) を利用せずに，B_a，C の方程式を連立してもよい．すなわち

$$B_a \text{ と } C \text{ が共有点をもつ}$$

$$\iff (**) \begin{cases} x^2 = 2a - ay \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ を満たす実数の組 } (x,\ y) \text{ が存在する}$$

ととらえる．

$$(**) \iff \begin{cases} x^2 = a(2-y) & \cdots\cdots\ ㋐ \\ y^2 - ay + 2a - 1 = 0 & \cdots\cdots\ ㋑ \end{cases}$$

㋐ より $y \leqq 2$ であり，求める条件は，㋑ が $y \leqq 2$ の範囲で実数解をもつことである．

$f(y) = y^2 - ay + 2a - 1$ とおく．

$$f(2) = 4 - 2a + 2a - 1 = 3$$

に注意すると，求める条件は

$$\begin{cases} \text{判別式}: a^2 - 4(2a-1) \geqq 0 \\ \text{軸の位置}: \dfrac{a}{2} < 2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} a \leqq 4 - 2\sqrt{3} \text{ または } 4 + 2\sqrt{3} \leqq a \\ a < 4 \end{cases}$$

$a > 0$ もあわせると

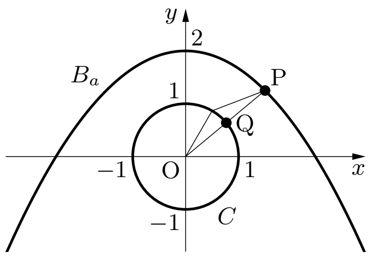
$$0 < a \leqq 4 - 2\sqrt{3}$$

である．

(3) B_a と C が共有点をもつとき，P と Q との距離 PQ は 0 である．(2) より，このときの a の範囲は，$0 < a \leqq 4 - 2\sqrt{3}$ である．

次に，B_a と C が共有点をもたないときを考える．

まず，P を固定し，Q を C 上で動かす．このとき，PQ が最小になるのは O，Q，P がこの順に一直線上に並ぶときである．この状態で P を動かし PQ の最小値を求める．P は B_a 上を動くから



$$
\begin{aligned}
&(\text{PQ の最小値})\\
&= (\text{OP の最小値}) - \text{OQ}\\
&= (\text{OP の最小値}) - 1\\
&= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{8a-a^2}}{2} - 1 & (4-2\sqrt{3} < a < 4 \text{ のとき}) \\ 1 & (a \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

以上から，求める最小値は

$$
\boldsymbol{\begin{cases} 0 & (0 < a \leqq 4-2\sqrt{3} \text{ のとき}) \\ \dfrac{\sqrt{-a^2+8a}}{2} - 1 & (4-2\sqrt{3} < a < 4 \text{ のとき}) \\ 1 & (a \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
$$

である．