2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=x^2-2x+3$，$g(x)=2x^2+6x-1$ と定める．このとき，$f(x) \geqq g(x)$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{(3)}$ である．関数 $h(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$ は，x に対して $f(x)$ と $g(x)$ のうち，大きくない方を値にもつ関数を表すとする．x が $-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲にあるとき，$h(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．このとき $(M,\ m)=\boxed{(4)}$ である．

(21 福岡大 医 1(2))

【答】

(3)	(4)
$-4-2\sqrt{5} \leqq x \leqq -4+2\sqrt{5}$	$\left(3,\ -\dfrac{11}{2}\right)$

【解答】

$f(x) \geqq g(x)$ を変形すると

$$x^2-2x+3 \geqq 2x^2+6x-1$$
$$x^2+8x-4 \leqq 0$$

これを解いて

$$\boldsymbol{-4-2\sqrt{5} \leqq x \leqq -4+2\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．これより

$$\begin{aligned} h(x) &= \min\{f(x),\ g(x)\} \\ &= \begin{cases} g(x) & (-4-2\sqrt{5} \leqq x \leqq -4+2\sqrt{5} \text{ のとき}) \\ f(x) & (x \leqq -4-2\sqrt{5},\ -4+2\sqrt{5} \leqq x \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．$-4-2\sqrt{5} < -2 < -4+2\sqrt{5} < 2$ であることに注意すると

(i) $-2 \leqq x \leqq -4+2\sqrt{5}$ のとき

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) \\ &= 2x^2+6x-1 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{11}{2} \end{aligned}$$

(ii) $-4+2\sqrt{5} \leqq x \leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) \\ &= x^2-2x+3 \\ &= (x-1)^2+2 \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，$y=h(x)$ のグラフは右のようになり

$x=2$ のとき，最大値 $M=3$，

$x=-\dfrac{3}{2}$ のとき，最小値 $m=-\dfrac{11}{2}$

をとる．したがって

$$\boldsymbol{(M,\ m)=\left(3,\ -\frac{11}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．