定数 a は $\dfrac{1}{6} < a < \dfrac{1}{4}$ を満たすとする．座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす．

- 2 点 A，B は放物線 $y = -x^2 + 2a$ 上にある．
- 2 点 C，D は放物線 $y = 2x^2 - a$ 上にある．
- 2 点 A，D の x 座標は等しく，かつ正である．
- 点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい．

点 A の x 座標を t とする．長方形 ABCD の周および内部を，原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする．

(1) S を t の式で表せ．
(2) S の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

(21 千葉大 1)

【答】

(1) $S = \begin{cases} \{t^4 - (4a-1)t^2 + 4a^2\}\pi & \left(0 < t \leqq \sqrt{\dfrac{a}{2}} \text{ のとき}\right) \\ (-3t^4 + t^2 + 3a^2)\pi & \left(\sqrt{\dfrac{a}{2}} < t < \sqrt{a} \text{ のとき}\right) \end{cases}$

(2) $t = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき，最大値 $\left(3a^2 + \dfrac{1}{12}\right)\pi$

【解答】

$$\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$$
$$y = -x^2 + 2a \qquad \cdots\cdots ①$$
$$y = 2x^2 - a \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② の交点の x 座標は

$$-x^2 + 2a = 2x^2 - a$$
$$3x^2 = 3a \qquad \therefore \quad x = \pm\sqrt{a}$$

である．

① 上の点 A，② 上の点 D の x 座標は等しく t (>0) であるから，A，B の座標は

$$\mathrm{A}\big(t,\ -t^2 + 2a\big),\ \mathrm{D}\big(t,\ 2t^2 - a\big)$$

である．また，A の y 座標は D の y 座標より大きいから

$$-t^2 + 2a > 2t^2 - a$$
$$3t^2 < 3a \qquad \therefore \quad 0 < t < \sqrt{a}$$

である．さらに，線分 AD は長方形 ABCD の一つの辺であり，y 軸に平行であるから，① 上の点 B，② 上の点 C の座標は

$$\mathrm{B}\big(-t,\ -t^2 + 2a\big),\ \mathrm{C}\big(-t,\ 2t^2 - a\big)$$

である．

回転の中心 O が長方形 ABCD の周および内部にあるか否かで場合分けすると，O が長方形 ABCD の周および内部にあるのは

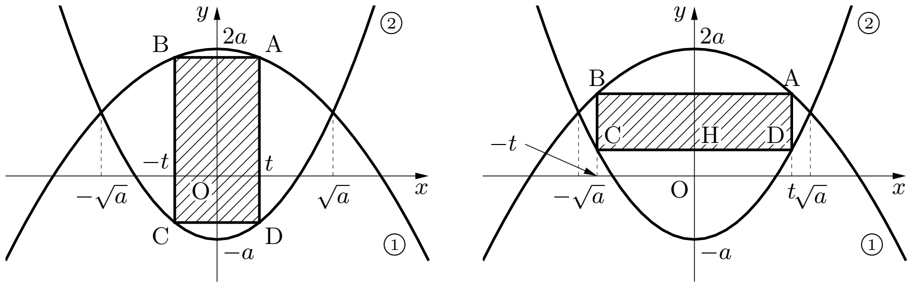
$$2t^2 - a \leqq 0 \qquad \therefore \quad 0 < t \leqq \sqrt{\frac{a}{2}} \qquad \cdots\cdots (\mathrm{i})$$

のときであり，外部にあるのは

$$\sqrt{\frac{a}{2}} < t < \sqrt{a} \qquad \cdots\cdots \text{(ii)}$$

のときである．

(i) $0 < t \leqq \sqrt{\dfrac{a}{2}}$ のとき　　(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{2}} < t < \sqrt{a}$ のとき



(1) (i) $0 < t \leqq \sqrt{\dfrac{a}{2}}$ のとき

$$|-t^2+2a| - |2t^2-a| = (-t^2+2a) + (2t^2-a) = t^2+a > 0 \quad (\because\ ①)$$

$\therefore\quad \mathrm{OA} > \mathrm{OD}$

であるから，長方形 ABCD の周および内部を，原点 O を中心に 1 回転させてできる図形の面積 S は

$$S = \pi\mathrm{OA}^2 = \pi\{t^2 + (-t^2+2a)^2\}$$
$$= \{t^4 - (4a-1)t^2 + 4a^2\}\pi$$

である．

(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{2}} < t < \sqrt{a}$ のとき

O から直線 CD に下した垂線の足を H とおくと

$$S = \pi\mathrm{OA}^2 - \pi\mathrm{OH}^2 = \pi\{t^2 + (-t^2+2a)^2\} - \pi(2t^2-a)^2$$
$$= (-3t^4 + t^2 + 3a^2)\pi$$

である．

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{S = \begin{cases} \{t^4 - (4a-1)t^2 + 4a^2\}\pi & \left(0 < t \leqq \sqrt{\dfrac{a}{2}}\ \text{のとき}\right) \\ (-3t^4 + t^2 + 3a^2)\pi & \left(\sqrt{\dfrac{a}{2}} < t < \sqrt{a}\ \text{のとき}\right) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) の結果において，$u = t^2$ とおくと

$$S = \begin{cases} \{u^2 - (4a-1)u + 4a^2\}\pi & \left(0 < u \leqq \dfrac{a}{2}\ \text{のとき}\right) \\ (-3u^2 + u + 3a^2)\pi & \left(\dfrac{a}{2} < u < a\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

となる．

$$S = \begin{cases} \left\{\left(u - 2a + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 2a - \dfrac{1}{4}\right\}\pi & \left(0 < u \leqq \dfrac{a}{2}\ \text{のとき}\right) \\ \left\{-3\left(u - \dfrac{1}{6}\right)^2 + 3a^2 + \dfrac{1}{12}\right\}\pi & \left(\dfrac{a}{2} < u < a\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

であり

$0 < u \leqq \dfrac{a}{2}$ のとき，軸の方程式は $u = 2a - \dfrac{1}{2}$ である．$\dfrac{1}{6} < a < \dfrac{1}{4}$ より，軸の位置は

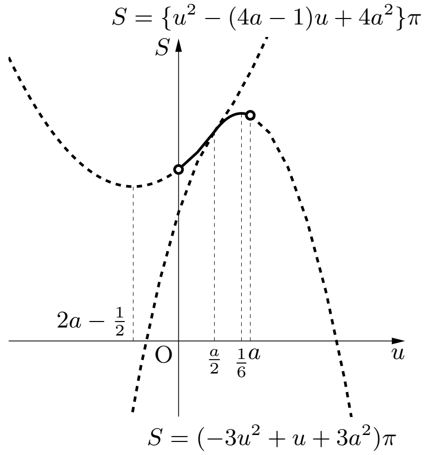
$$2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} < 2a - \frac{1}{2} < 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{6} < 2a - \frac{1}{2} < 0$$

$\dfrac{a}{2} < u < a$ のとき，軸の方程式は $u = \dfrac{1}{6}$ である．$\dfrac{1}{6} < a < \dfrac{1}{4}$ より，$\dfrac{a}{2} < \dfrac{1}{8}$ であり，軸の位置は

$$\frac{a}{2} < \frac{1}{6} < a$$

であり，右図を得る．



よって，S は $u = \dfrac{1}{6}$ のとき

$$\textbf{最大値}\ \left(\boldsymbol{3a^2 + \frac{1}{12}}\right)\boldsymbol{\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

をとる．このとき t の値は

$$\boldsymbol{t = \frac{1}{\sqrt{6}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．