以下の問いに答えよ．

(1) k^2+2 が素数となるような素数 k をすべてみつけよ．また，それ以外にないことを示せ．
(2) 整数 l が 5 で割り切れないとき，l^4-1 が 5 で割り切れることを示せ．
(3) m^4+4 が素数となるような素数 m は存在しないことを示せ．

(21 お茶の水女大 理・文教・生科 1)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 略

【解答】

(1) 求める素数 k は，$k=3$ のみである．なぜならば
$k=3$ のとき，$3^2+2=11$ は素数であり，条件を満たす．
k が 3 以外の素数のとき，k を 3 で割った余りは 1 または 2 であるから

$$k \equiv \pm 1 \pmod 3$$

であり

$$k^2+2 \equiv (\pm 1)^2+2=3\equiv 0 \pmod 3$$

である．すなわち，k^2+2 は 3 の倍数であり，素数ではない．
よって，k^2+2 が素数となるような素数 k は 3 のみである． ……(証明終わり)

(2) 整数 l が 5 で割れないとき，整数 l を 5 で割った余りは 1，2，3，4 のいずれかであり

$$l\equiv \pm 1 \text{ または } \pm 2 \pmod 5$$

のいずれかである．

(i) $l\equiv \pm 1 \pmod 5$ のとき

$$l^4-1\equiv (\pm 1)^4-1=0 \pmod 5$$

(ii) $l\equiv \pm 2 \pmod 5$ のとき

$$l^4-1\equiv (\pm 2)^4-1=15\equiv 0 \pmod 5$$

以上 (i)，(ii) より，l^4-1 は 5 で割り切れる． ……(証明終わり)

- l^4-1 を変形すると

$$\begin{aligned} l^4-1 &= (l^2-1)(l^2+1) \\ &= (l-1)(l+1)(l^2-4+5) \\ &= (l-1)(l+1)\{(l-2)(l+2)+5\} \\ &= (l-1)(l+1)(l-2)(l+2)+5(l-1)(l+1) \end{aligned}$$

となる．
連続した 5 つの整数 $l-2$，$l-1$，l，$l+1$，$l+2$ の中に 5 の倍数は 1 つ存在するが，l は 5 の倍数でないので，$l-2$，$l-1$，$l+1$，$l+2$ の中の 1 つが 5 の倍数である．したがって，積 $(l-1)(l+1)(l-2)(l+2)$ は 5 の倍数である．$5(l-1)(l+1)$ も 5 の倍数であるから，l^4-1 は 5 で割り切れる．

(3) (2) の利用を考える．

素数 m が 5 で割り切れないとき，(2) より $m^4-1=5n$ (n は自然数) を表すことができる．このとき

$$m^4+4=(5n+1)+4=5(n+1)$$

$n+1 \geqq 2$ であり，m^4+4 は素数ではない．

$m=5$ のとき

$$m^4+4=5^4+4=629=\ 17\cdot 37$$

であるから，これは素数ではない．

よって，m^4+4 が素数となるような素数 m は存在しない． …… (証明終わり)

- 背理法を用いる．

  m^4+4 が素数となるような素数 m が存在すると仮定すると，$m \geqq 2$ である．

  m^4+4 を因数分解すると

  $$m^4+4=(m^2+2)^2-2\cdot 2m^2=(m^2-2m+2)(m^2+2m+2)$$

  であり

  $$m^2-2m+2=(m-1)^2+1 \geqq (2-1)^2+1=2$$
  $$m^2+2m+2=(m+1)^2+1 \geqq (2+1)^2+1=10$$

  である．これは m^4+4 が 2 以上の自然数の積であるということであり，m^4+4 が素数であることに反する．

  よって，m^4+4 が素数となるような素数 m は存在しない．