以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 $n,\ k$ が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき，${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることを示せ．

(2) p を素数とする．$k \leqq n$ をみたす自然数の組 $(n,\ k)$ で ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となるものをすべて求めよ．

(21 九州大 理系 5)

【答】

(1) 略

(2) $(n,\ k) = (p,\ 1),\ (p,\ p-1)$

【解答】

(1) $2 \leqq k \leqq n-2$ のとき，$n \geqq k+2$ であるから

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots \cdot 2 \cdot 1} \\
&= n \cdot \frac{n-1}{k} \cdot \frac{n-2}{k-1} \cdot \cdots \cdot \frac{n-k+1}{2} \\
&\geqq n \cdot \frac{(k+2)-1}{k} \cdot \frac{(k+2)-2}{k-1} \cdot \cdots \cdot \frac{(k+2)-k+1}{2} \\
&= n \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{2} \\
&> n
\end{aligned}$$

よって，${}_n\mathrm{C}_k > n$ である．　　　　……(証明終わり)

(2) $${}_n\mathrm{C}_k = p\ (p \text{ は素数}) \qquad \cdots\cdots ①$$

(i) $2 \leqq k \leqq n-2$ のとき，(1) と①より

$$p > n$$

である．一方

$$p = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\therefore\quad p \cdot k(k-1)\cdots \cdot 2 \cdot 1 = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

左辺は p の倍数でから，右辺も p の倍数であり，p は素数であるから，$n,\ n-1,\ \cdots,$ $n-k+1$ の少なくとも 1 個は p の倍数であるが，これは $p > n$ に反する．よって，① は成り立たない．

(ii) $k = 1$ のとき，①は

$${}_n\mathrm{C}_1 = p \qquad \therefore\quad n = p$$

(iii) $k = n$ のとき，①は

$${}_n\mathrm{C}_n = p \qquad \therefore\quad 1 = p$$

これは p が素数であることに反する．

(iv) $k = n-1$ のとき ①は

$${}_n\mathrm{C}_{n-1} = p \qquad \therefore\quad n = p$$

以上，(i)～(iv) より ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となる自然数の組 $(n,\ k)$ は

$$\boldsymbol{(n,\ k) = (p,\ 1),\ (p,\ p-1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．