

p が素数ならば $p^4 + 14$ は素数でないことを示せ.

(21 京都大 文 5)

【答】 略

【解答】

$f(p) = p^4 + 14$ とおく. p に素数を順次代入していく.

$$f(2) = 16 + 14 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \therefore f(2) \text{ は素数でない.}$$

$$f(3) = 81 + 14 = 95 = 5 \cdot 19 \quad \therefore f(3) \text{ は素数でない.}$$

$p > 3$ のとき, p は素数なので, $p(> 3)$ を 3 で割った余りは 1 か 2 であり,

$$p \equiv \pm 1 \pmod{3}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(p) &\equiv (\pm 1)^4 + 14 \pmod{3} \\ &= 15 \\ &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

である. すなわち, $f(p)$ は 3 の倍数であり, 素数でない.

以上より, p が素数ならば $f(p)$ は素数でないことは示された.

…… (証明終わり)

- $p = 3$, $p \neq 3$ で場合分けしてもよい.