$n$ を 2 以上の整数とする．$3^n-2^n$ が素数ならば $n$ も素数であることを示せ．

(21 京都大 理 6(1))

---

【答】 略

---

【解答】

対偶を示す．2 以上の整数 $n$ について，$n$ が素数ではない仮定とすると

$$n=pq \quad (p,\ q \text{ は 2 以上の自然数})$$

とおける．このとき

$$\begin{aligned}3^n-2^n&=3^{pq}-2^{pq}\\&=(3^p-2^p)\{(3^p)^{q-1}+(3^p)^{q-2}\cdot 2^p+\cdots+(2^p)^{q-1}\}\end{aligned}$$

である．ここでの各因数は $p \geqq 2,\ q \geqq 2$ より

$$3^p-2^p=(3-2)(3^{p-1}+3^{p-2}\cdot 2+\cdots+2^{p-1}) \geqq 1\cdot(3+2)=5$$

$$(3^p)^{q-1}+(3^p)^{q-2}\cdot 2^p+\cdots+(2^p)^{q-1} \geqq 3^2+2^2=13$$

であり，ともに 1 でない正の整数である．すなわち，$3^n-2^n$ は合成数であり，素数ではない．

したがって，$3^n-2^n$ が素数ならば $n$ も素数である． …… (証明終わり)