以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $39x-17y=1$ の整数解をすべて求めよ．

(2) 方程式 $39x-17y=1$ のどんな整数解 $(x,\ y)$ についても，$x,\ y$ が互いに素であることを示せ．

(3) 座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点と直線 $2(39x-17y)=7$ の距離の最小値を求めよ．さらに，そのときの点を 1 つ求め，その座標を答えよ．

(21 公立はこだて未来大 シス情 2)

【答】

(1) $(x,\ y)=(17k+7,\ 39k+16)$　(k は整数)

(2) 略

(3) 最小値は $\dfrac{\sqrt{1810}}{3620}$，座標は $(21,\ 48)$ 等

【解答】

(1)
$$39x-17y=1 \quad \cdots\cdots ①$$
これを満たす $(x,\ y)$ の 1 つとして $(x,\ y)=(7,\ 16)$ をとることができる．すなわち
$$39\cdot 7-17\cdot 16=1 \quad \cdots\cdots ②$$
① − ② より
$$39(x-7)-17(y-16)=0$$
$$\therefore\quad 39(x-7)=17(y-16)$$
39 と 17 は互いに素であるから，整数 k を用いて
$$x-7=17k$$
と表すことができ，このとき
$$39\cdot 17k=17(y-16) \qquad \therefore\quad y-16=39k$$
であり
$$\boldsymbol{(x,\ y)=(17k+7,\ 39k+16)}\quad \textbf{(}\boldsymbol{k}\ \textbf{は整数)} \qquad \cdots\cdots(答)$$
である．

- $(x,\ y)=(7,\ 16)$ は互除法を利用した．すなわち
$$39=17\cdot 2+\boxed{5}$$
$$17=5\cdot 3+\boxed{2}$$
$$5=2\cdot 2+1$$
であるから
$$\begin{aligned}1&=5-\boxed{2}\cdot 2=5-(17-5\cdot 3)\cdot 2\\&=17\cdot(-2)+\boxed{5}\cdot 7=17\cdot(-2)+(39-17\cdot 2)\cdot 7\\&=39\cdot 7-17\cdot 16\end{aligned}$$
$$\therefore\quad 39\cdot 7-17\cdot 16=1$$
である．

(2) $17k+7,\ 39k+16$ の最大公約数を求める．

$$\begin{aligned}&39k+16=(17k+7)\cdot 2+5k+2\\&17k+7=(5k+2)\cdot 3+2k+1\\&5k+2=(2k+1)\cdot 2+k\\&2k+1=k\cdot 2+1\end{aligned}$$

ユークリッドの互除法により，$39k+16$ と $17k+7$ の最大公約数は 1 であるから，どのような整数 k に対しても $39k+16$ と $17k+7$ は互いに素である．すなわち，① のどんな整数解 $(x,\ y)$ についても，x と y は互いに素である． …… (証明終わり)

(3) 直線 $2\cdot 39x-2\cdot 17y-7=0$ を l とし，l と点 $(m,\ n)$ ($m,\ n$ は整数) の距離を d とおくと

$$d=\frac{|2\cdot 39m-2\cdot 17n-7|}{\sqrt{(2\cdot 39)^2+\{(-2)\cdot 17\}^2}}$$

分母は一定なので，d が最小となるのは (d の分子) $=|2(39m-17n)-7|$ が最小となるときである．$39m-17n$ は整数であるから，$|2(39m-17n)-7|$ は奇数であり，$|2(39m-17n)-7|=1$ となる整数 $m,\ n$ が存在すれば，このときの d が最小値となる．

$$\begin{aligned}&2(39m-17n)-7=\pm 1\\ \therefore\ \ &39m-17n=3,\ 4\end{aligned}$$

② $\times\ 3$ より

$$39\cdot 21-17\cdot 48=3$$

よって，$(m,\ n)=\mathbf{(21,\ 48)}$ のとき ……(答)

$$(d\text{ の最小値})=\frac{1}{2\sqrt{1521+289}}=\frac{1}{2\sqrt{1810}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{1810}}{3620}}$$ ……(答)

となる．