4 元 2 次の不定方程式

正の整数 m に対して

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m,\quad a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組がいくつあるかを考える．

(1) $m=14$ のとき，①を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$$

のただ一つである．

また，$m=28$ のとき，① を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個である．

(2) a が奇数のとき，整数 n を用いて $a=2n+1$ と表すことができる．このとき，$n(n+1)$ は偶数であるから，次の条件がすべての奇数 a で成り立つような正の整数 h のうち，最大のものは $h=\boxed{\text{カ}}$ である．

条件 : a^2-1 は h の倍数である．

よって，a が奇数のとき，a^2 を $\boxed{\text{カ}}$ で割ったときの余りは 1 である．

また，a が偶数のとき，a^2 を $\boxed{\text{カ}}$ で割ったときの余りは，0 または 4 のいずれかである．

(3) (2) により，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が $\boxed{\text{カ}}$ の倍数ならば，整数 $a,\ b,\ c,\ d$ のうち，偶数であるものの個数は $\boxed{\text{キ}}$ 個である．

(4) (3) を用いることにより，m が $\boxed{\text{カ}}$ の倍数であるとき，①を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ が求めやすくなる．

例えば，$m=224$ のとき，①を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$\left(\boxed{\text{クケ}},\ \boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$$

のただ一つであることがわかる．

(5) 7 の倍数で 896 の約数である正の整数 m のうち，① を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組の個数が $\boxed{\text{オ}}$ 個であるものの個数は $\boxed{\text{ス}}$ 個であり，そのうち最大のものは $m=\boxed{\text{セソタ}}$ である．

(21 共通テスト 第 2 日程 IA4)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	クケ	コ	サ	シ	ス	セソタ
3	2	1	0	3	8	4	12	8	4	0	3	448

【解答】

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m,\quad a \geqq b \geqq \mathrm{c} \geqq d \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $m=14$ のとき，① より $a^2 \leqq 14 \leqq 4a^2$ であり，a^2 は $\dfrac{7}{2} \leqq a^2 \leqq 14$ を満たす．
a は 0 以上の整数であるから $a=2$ または 3 である．

(i) $a=2$ のとき

$$① \iff 4+b^2+c^2+d^2=14,\quad 2 \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$$
$$\therefore\quad b^2+c^2+d^2=10$$

$b^2 \leqq 10 \leqq 3b^2$ であり，b^2 は $\dfrac{10}{3} \leqq b^2 \leqq 10$ を満たす．
b は 0 以上の整数であるから，$b=2$ である．このとき

$$c^2+d^2=6,\quad 2 \geqq c \geqq d \geqq 0$$

これを満たす整数 $c,\ d$ は存在しない．

(ii) $a=3$ のとき

$$① \iff 9+b^2+c^2+d^2=14,\quad 3 \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$$
$$\therefore\quad b^2+c^2+d^2=5$$

$b^2 \leqq 5 \leqq 3b^2$ であり，b^2 は $\dfrac{5}{3} \leqq b^2 \leqq 5$ を満たす．
b は 0 以上の整数であるから，$b=2$ である．このとき

$$c^2+d^2=1,\quad 2 \geqq c \geqq d \geqq 0$$

$c,\ d$ は 0 以上の整数であるから，$c=1,\ d=0$ である．

(i)，(ii) より，$m=14$ のとき，① を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

(3，2，1，0) ……(答)

のただ一つである．

また，$m=28$ のときも同じく考えて，① より $a^2 \leqq 28 \leqq 4a^2$ であり，a^2 は $7 \leqq a^2 \leqq 28$ を満たすから，$a=3$ または 4 または 5 である．

(i) $a=3$ のとき

$$① \iff 9+b^2+c^2+d^2=28,\quad 3 \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$$
$$\therefore\quad b^2+c^2+d^2=19$$

$b^2 \leqq 19 \leqq 3b^2$ であり，b^2 は $\dfrac{19}{3} \leqq b^2 \leqq 19$ を満たす．
b は 0 以上の整数であるから，$b=3$ である．このとき

$$c^2+d^2=10,\quad 3 \geqq c \geqq d \geqq 0$$

$c,\ d$ は 0 以上の整数であるから $c=3,\ d=1$ である．

$$\therefore\quad (a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 3,\ 3,\ 1)$$

(ii) $a=4$ のとき

$$① \iff 16+b^2+c^2+d^2=28,\quad 4 \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$$
$$\therefore\quad b^2+c^2+d^2=12$$

$b^2 \leqq 12 \leqq 3b^2$ であり，b^2 は $4 \leqq b^2 \leqq 12$ を満たす．
b は 0 以上の整数であるから，$b=2$ または 3 である．

(ア) $b=2$ のとき

$$c^2+d^2=8, \quad 2 \geqq c \geqq d \geqq 0$$

c, d は 0 以上の整数であるから $c=d=2$ である.

$$\therefore \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(4,\ 2,\ 2,\ 2)$$

(イ) $b=3$ のとき

$$c^2+d^2=3, \quad 3 \geqq c \geqq d \geqq 0$$

これを満たす整数 c, d は存在しない.

(iii) $a=5$ のとき

$$① \iff 25+b^2+c^2+d^2=28, \quad 5 \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$$

$$\therefore \quad b^2+c^2+d^2=3$$

b, c, d は 0 以上の整数であるから $b=c=d=1$ である.

$$\therefore \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(5,\ 1,\ 1,\ 1)$$

(i)〜(iii) より, ① を満たす整数 a, b, c, d の組の個数は **3 個** である. ……(答)

(2) a が奇数のときの a^2-1 の約数を調べる.

a が奇数のとき, $a=2n+1$ (n は整数) と表すことができ

$$\begin{aligned} a^2-1 &= (2n+1)^2-1 \\ &= 4n^2+4n \\ &= 4n(n+1) \end{aligned}$$

ここで連続する整数の積 $n(n+1)$ は偶数であるから, $n(n+1)=2l$ (l は整数) とおくことができ

$$a^2-1=8l$$

と表すことができる.

すべての奇数 a で a^2-1 が h の倍数であるといえるのは, h が 8 の約数のときであり, 8 の約数としては 1, 2, 4, 8 があるから, 最大のものは $\boldsymbol{h=8}$ である. ……(答)

よって, a が奇数のとき, $a^2=8l+1$ であり, a^2 を 8 で割ったときの余りは 1 である.

また, a が偶数のとき, $a=2n$ (n は整数) と表すことができ

$$a^2=4n^2$$

である.

n が偶数のとき, $n=2k$ (k は整数) とおくと

$$a^2=4\times 4k^2=16k^2$$

であり, a^2 を 8 で割ったときの余りは 0 である.

n が奇数のとき, $n=2k+1$ (k は整数) とおくと

$$a^2=4(2k+1)^2=4(4k^2+4k+1)=16(k^2+k)+4$$

であり, a^2 を 8 で割ったときの余りは 4 である.

したがって, a が偶数のとき, a^2 を 8 で割ったときの余りは, 0 または 4 のいずれかである.

(3) (2) より, $a^2+b^2+c^2+d^2$ を 8 で割ったときの余りは, a, b, c, d の奇数の個数によって, 右のようになる.

よって, $a^2+b^2+c^2+d^2$ が 8 の倍数ならば, 整数 a, b, c, d の奇数の個数は 0, すなわち, すべて偶数であり, 偶数であるものの個数は **4 個** である. ……(答)

奇数の個数	余り
0	0 または 4
1	1 または 5
2	2 または 6
3	3 または 7
4	4

(4) $m=224$ のとき

$224\ (=8\times 28)$ は 8 の倍数であるから，(3) より $a,\ b,\ c,\ d$ は偶数である．

$$a=2p,\ b=2q,\ c=2r,\ d=2s \quad (p,\ q,\ r,\ s \text{ は整数})$$

とおくことができ

$$a^2+b^2+c^2+d^2=224$$
$$4(p^2+q^2+r^2+s^2)=224$$
$$\therefore\quad p^2+q^2+r^2+s^2=56$$

さらに，$56\ (=8\times 7)$ も 8 の倍数であるから，$p,\ q,\ r,\ s$ は偶数である．

$$p=2t,\ q=2u,\ r=2v,\ s=2w \quad (t,\ u,\ v,\ w \text{ は整数})$$

とおくことができ

$$p^2+q^2+r^2+s^2=56$$
$$4(t^2+u^2+v^2+w^2)=56$$
$$\therefore\quad t^2+u^2+v^2+w^2=14$$

(1) の前半より，$(t,\ u,\ v,\ w)=(3,\ 2,\ 1,\ 0)$

したがって

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(2p,\ 2q,\ 2r,\ 2s)=(4t,\ 4u,\ 4v,\ 4w)$$
$$=\mathbf{(12,\ 8,\ 4,\ 0)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のただ一つである．

(5) $896=7\times 2^7$ より，7 の倍数で 896 の約数である正の整数 m は

$$m=7,\ 14,\ 28,\ 56,\ 112,\ 224,\ 448,\ 896$$

である．

(i) $m=7$ のとき，$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 1,\ 1)$ の 1 組．

(ii) $m=14$ のとき，(1) より，組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は 1 個．

(iii) $m=28$ のとき，(1) より，組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は 3 個．

(iv) $m=56=8\times 7$ のとき，$(a,\ b,\ c,\ d)=(2p,\ 2q,\ 2r,\ 2s)$ とおくことができて

$$a^2+b^2+\mathrm{c}^2+d^2=56$$
$$4(p^2+q^2+r^2+s^2)=8\times 7$$
$$p^2+q^2+r^2+s^2=14$$

よって，(1) より，組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ すなわち 組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は 1 個．

(v) $m=112=8\times 14$ のとき，$(a,\ b,\ c,\ d)=(2p,\ 2q,\ 2r,\ 2s)$ とおくことができて

$$a^2+b^2+c^2+d^2=112$$
$$4(p^2+q^2+r^2+s^2)=8\times 14$$
$$p^2+q^2+r^2+s^2=28$$

よって，(1) より，組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ すなわち 組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は 3 個．

(vi) $m=224$ のとき，(4) より，組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は 1 個．

(vii) $m=448=8\times 56$ のとき，$(a,\ b,\ c,\ d)=(2p,\ 2q,\ 2r,\ 2s)$ とおくことができて

$$a^2+b^2+\mathrm{c}^2+d^2=448$$
$$4(p^2+q^2+r^2+s^2)=8\times 56$$
$$p^2+q^2+r^2+s^2=112$$

よって，(v) より，組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ すなわち 組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は 3 個．

(viii) $m=896=8\times 112$ のとき，$(a,\ b,\ c,\ d)=(2p,\ 2q,\ 2r,\ 2s)$ とおくことができて

$$a^2+b^2+\mathrm{c}^2+d^2=896$$
$$4(p^2+q^2+r^2+s^2)=8\times 112$$
$$p^2+q^2+r^2+s^2=224$$

よって，(vi) より，組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ すなわち 組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は 1 個.

以上から，①を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組が 3 個のものは

$m=28,\ 112,\ 448$ の　**3 個**　……(答)

であり，そのうち最大のものは

$m=\mathbf{448}$　……(答)

である.