円周上に 15 個の点 P_0, P_1, $\cdots$, P_{14} が反時計回りに順に並んでいる．最初，点 P_0 に石がある．さいころを投げて偶数の目が出たら石を反時計回りに 5 個先の点に移動させ，奇数の目が出たら石を時計回りに 3 個先の点に移動させる．この操作を繰り返す．例えば，石が点 P_5 にあるとき，さいころを投げて 6 の目が出たら石を点 P_{10} に移動させる．次に，5 の目が出たら点 P_{10} にある石を点 P_7 に移動させる．

(1) さいころを 5 回投げて，偶数の目が $\boxed{\text{ア}}$ 回，奇数の目が $\boxed{\text{イ}}$ 回出れば，点 P_0 にある石を点 P_1 に移動させることができる．このとき，$x = \boxed{\text{ア}}$, $y = \boxed{\text{イ}}$ は，不定方程式 $5x - 3y = 1$ の整数解になっている．

(2) 不定方程式

$$5x - 3y = 8 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のすべての整数解 x, y は，k を整数として

$$x = \boxed{\text{ア}} \times 8 + \boxed{\text{ウ}}k, \quad y = \boxed{\text{イ}} \times 8 + \boxed{\text{エ}}k$$

と表される．①の整数解 x, y の中で，$0 \leqq y < \boxed{\text{エ}}$ を満たすものは

$$x = \boxed{\text{オ}}, \quad y = \boxed{\text{カ}}$$

である．したがって，さいころを $\boxed{\text{キ}}$ 回投げて，偶数の目が $\boxed{\text{オ}}$ 回，奇数の目が $\boxed{\text{カ}}$ 回出れば，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる．

(3) (2) において，さいころを $\boxed{\text{キ}}$ 回より少ない回数だけ投げて，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることはできないだろうか．

（＊） 石を反時計回りまたは時計回りに 15 個先の点に移動させると元の点に戻る．

（＊）に注意すると，偶数の目が $\boxed{\text{ク}}$ 回，奇数の目が $\boxed{\text{ケ}}$ 回出れば，さいころを投げる回数が $\boxed{\text{コ}}$ 回で，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる．このとき，$\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{キ}}$ である．

(4) 点 P_1, P_2, $\cdots$, P_{14} のうちから点を一つ選び，点 P_0 にある石をさいころを何回か投げてその点に移動させる．そのために必要となる，さいころを投げる最小回数を考える．例えば，さいころを 1 回だけ投げて点 P_0 にある石を点 P_2 へ移動させることはできないが，さいころを 2 回投げて偶数の目と奇数の目が 1 回ずつ出れば，点 P_0 にある石を点 P_2 へ移動させることができる．したがって，点 P_2 を選んだ場合には，この最小回数は 2 回である．

点 P_1, P_2, $\cdots$, P_{14} のうち，この最小回数が最も大きいのは点 $\boxed{\text{サ}}$ であり，その最小回数は $\boxed{\text{シ}}$ 回である．

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ P_{10}	① P_{11}	② P_{12}	③ P_{13}	④ P_{14}

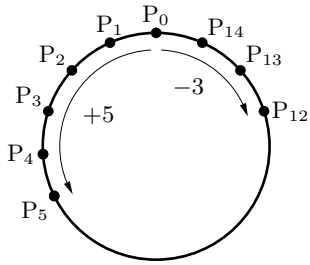
(21 共通テスト IA 4)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
2	3	3	5	4	4	8	1	4	5	3	6

【解答】

(1) さいころを 5 回投げるとき，偶数の目が x 回，奇数の目が y 回出て，点 P_0 にある石が点 P_1 に移動するということは



$$\begin{cases} x+y=5 \\ 5x-3y\equiv 1 \pmod{15} \end{cases}$$

を満たす 0 以上の整数 x, y が存在するということである．

$$\begin{cases} y=5-x \\ 5x-3(5-x)\equiv 1 \pmod{15} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} y=5-x \\ 8x\equiv 16 \pmod{15} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} y=5-x \\ 8x\equiv 1 \pmod{15} \end{cases}$$

x, y は 0 以上の整数であるから，$0\leqq x\leqq 5$ であり，$8x\equiv 1 \pmod{15}$ を満たす整数 x は $x=2$ のみである．このとき

$$x=\boxed{\mathbf{2}},\quad y=\boxed{\mathbf{3}} \qquad \cdots\cdots \text{(ア，イの答)}$$

- 8 と 15 は互いに素であるから

$$8x\equiv 8\cdot 2 \pmod{15} \quad \text{ならば，} \quad x\equiv 2 \pmod{15}$$

$$\therefore \quad x=2$$

- $x=\boxed{\text{ア}}$, $y=\boxed{\text{イ}}$ が $5x-3y=1$ の解であることが，問題文で与えらているので，$x+y=5$ を満たす 0 以上の解として $x=2$, $y=3$ は勘で分かる？

(2) $$5x-3y=8 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) の x, y は

$$5\cdot 2-3\cdot 3=1$$

$$\therefore \quad 5\cdot 2\cdot 8-3\cdot 3\cdot 8=8 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たすから，①, ② の辺々を引くと

$$5(x-2\cdot 8)-3(y-3\cdot 8)=0$$

$$\therefore \quad 5(x-2\cdot 8)=3(y-3\cdot 8)$$

5 と 3 は互いに素であるから，$x-2\cdot 8$ は 3 の倍数であり

$$x-2\cdot 8=3k \quad (k \text{ は整数})$$

とおくことができ，このとき

$$y-3\cdot 8=5k$$

である．すなわち，x, y は

$$x=2\cdot 8+\boxed{\mathbf{3}}k,\quad y=3\cdot 8+\boxed{\mathbf{5}}k \qquad \cdots\cdots \text{(ウ，エの答)}$$

と表される．① の解で $0\leqq y<5$ を満たすものは

$$0\leqq 3\cdot 8+5k<5 \qquad \therefore \quad -24\leqq 5k<-19 \qquad \therefore \quad k=-4$$

であり

$$x = 2\cdot 8 + 3\cdot(-4) = \boxed{\mathbf{4}}, \quad y = 3\cdot 8 + 5\cdot(-4) = \boxed{\mathbf{4}} \quad \cdots\cdots \text{(オ，カの答)}$$

である．このとき，$x + y = 4 + 4 = 8$ であるから，さいころを $\boxed{\mathbf{8}}$ 回投げて，偶数の目が 4 回，奇数の目が 4 回出れば，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる．

$\cdots\cdots$ (キの答)

(3) （＊）より，P_8 は P_{-7} と同一視できる．

$$5x - 3y = -7 \qquad \cdots\cdots ③$$

を満たす整数解を求める．(1) の結果より

$$5\cdot 2\cdot 7 - 3\cdot 3\cdot 7 = 7 \qquad \cdots\cdots ④$$

であり，③, ④ の辺々を加えると

$$5(x + 2\cdot 7) - 3(y + 3\cdot 7) = 0$$
$$\therefore \quad 5(x + 2\cdot 7) = 3(y + 3\cdot 7)$$

5 と 3 は互いに素であるから，$x + 2\cdot 7$ は 3 の倍数であり

$$x + 2\cdot 7 = 3l \quad (l \text{ は整数})$$

とおくことができ，このとき

$$y + 3\cdot 7 = 5l$$

である．すなわち，x, y は

$$x = 3l - 14, \quad y = 5l - 21$$

である．さいころは 8 回より少ない回数投げるから

$$0 \leqq x + y < 8$$
$$\therefore \quad 0 \leqq (3l - 14) + (5l - 21) < 8 \qquad \therefore \quad 35 \leqq 8l < 43 \qquad \therefore \quad l = 5$$

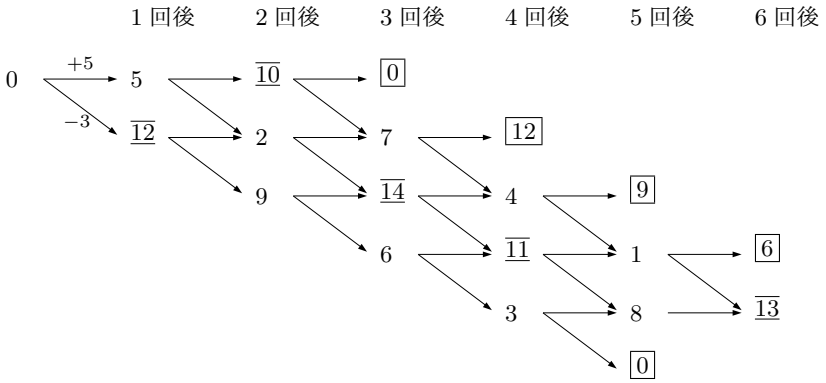
であり

$$x = 1, \quad y = 4$$

すなわち，偶数の目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 回，奇数の目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 回出れば，さいころを投げる回数が $\boxed{\mathbf{5}}$ 回で，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる．　$\cdots\cdots$ (ク〜コの答)

- $\begin{cases} x + y < 8 \\ 5x - 3y = -7 \end{cases}$ を満たす 0 以上の整数解として $x = 1$, $y = 4$ は勘で分かる？
- x が 3 のときの石の移動量は $5 \times 3 = 15 \equiv 0 \pmod{15}$ より 0 であることに注意すると，(2) で $(x,\ y) = (4,\ 4)$ は $(1,\ 4)$ に置き換えられ，さいころ投げの回数を減らすことができる．

(4) 1 回のさいころ投げに対する石の移動量は，反時計回りを＋とみると $+5$, -3 のいずれかである．P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, $\cdots$ を P_{14}, P_{13}, P_{12}, $\cdots$ と同一視し，$+5$, -3 の移動をそれぞれ $\longrightarrow$, $\searrow$ で表すと，点 P_n の n の推移は次のようになる．$\square$ はすでに通過した点を表している．



点 P_0 にある石が点 P_n に移動するとき，さいころを投げる最小回数が最も大きい点は P_{13} $\boxed{\boxed{\mathbf{3}}}$ であり，その最小回数は $\boxed{\mathbf{6}}$ 回である．　　…… (サ，シの答)

- 解答群をみると P_{10}，P_{11}，$\cdots$，P_{14} について，最小回数を比較する問題であるが，上の樹形図より P_0，P_1，$\cdots$，P_{14} すべてについての最小回数が求められ，P_{13} が最小回数が最大であることが分かった．
- 上の樹形図より (1)，(3) の結果の確認が取れる．
- P_{10}，P_{11}，$\cdots$，P_{14} の最小回数をそれぞれ求める．
  偶数の目が x 回，奇数の目が y 回出て，点 P_0 にある石が点 P_n $(n = 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14)$ に移動する場合を考える．

  $$5x - 3y = n$$

  この解は (2) と同様に考えると，整数 k を用いて

  $$x = 2n + 3k, \quad y = 3n + 3k$$

  と表すことができる．(3) の（$*$）に注意すると x が 3 のとき，y が 5 のときの石の移動量はどちらも 0 である．$n = 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14$ に対する 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ を一つ求め，$x + y$ が最小となるものを求める．
  $k = 0$ として解の組を 1 つ決める．

  $n = 10$ のとき: $(x,\ y) = (20,\ 30) = (3 \cdot 6 + 2,\ 5 \cdot 6) \longrightarrow (2,\ 0)$　　$\therefore\ x + y = 2$
  $n = 11$ のとき: $(x,\ y) = (22,\ 33) = (3 \cdot 7 + 1,\ 5 \cdot 6 + 3) \longrightarrow (1,\ 3)$　　$\therefore\ x + y = 4$
  $n = 12$ のとき: $(x,\ y) = (24,\ 36) = (3 \cdot 8,\ 5 \cdot 7 + 1) \longrightarrow (0,\ 1)$　　$\therefore\ x + y = 1$
  $n = 13$ のとき: $(x,\ y) = (26,\ 39) = (3 \cdot 8 + 2,\ 5 \cdot 7 + 4) \longrightarrow (2,\ 4)$　　$\therefore\ x + y = 6$
  $n = 14$ のとき: $(x,\ y) = (28,\ 42) = (3 \cdot 9 + 1,\ 5 \cdot 8 + 2) \longrightarrow (1,\ 2)$　　$\therefore\ x + y = 3$

  以上より，最小回数が最も大きい点は P_{13} である．