自然数 n に対して

$$N=(n+2)^3-n(n+1)(n+2)$$

が 36 の倍数になるような n をすべて求めよ．

(21 札幌医大 1(2))

【答】 $n=18l-2$ （l は自然数）

【解答】

$$N=(n+2)^3-n(n+1)(n+2)$$

n は自然数であるから，連続する 3 つの整数の積 $n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数である．

$$(n+2)^3=N+n(n+1)(n+2)$$

であり，N が 36 の倍数であるならば

$$(n+2)^3 \quad \text{すなわち} \quad n+2 \text{ は 6 の倍数}$$

となることが必要である．k を自然数として

$$n+2=6k$$

と表すと

$$\begin{aligned} N &= (6k)^3-(6k-2)(6k-1)6k \\ &= 6k\{36k^2-(36k^2-18k+2)\} \\ &= 12k(9k-1) \\ &= 36\cdot 3k^2-12k \end{aligned}$$

$$\therefore \quad 12k=36\cdot 3k^2-N$$

である．N が 36 の倍数であるならば

$$12k \text{ は 36 の倍数} \quad \text{すなわち} \quad k \text{ は 3 の倍数}$$

であることが必要である．l を自然数として $k=3l$ とおくと

$$n=6\cdot 3l-2=18l-2$$

となる．

逆に，$n=18l-2$ のとき

$$\begin{aligned} N &= (18l)^3-(18l-2)(18l-1)18l \\ &= 18l\{18^2l^2-(18^2l^2-54l+2)\} \\ &= 36l(27l-1) \end{aligned}$$

であり，36 の倍数である (十分)．

よって，求める n のすべては

$$\boldsymbol{n=18l-2 \quad (l \text{ は自然数})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．