以下の問いに答えよ．

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ．

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ．

(2) 正の整数 n に対して，

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とおく．このとき，$n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ．

(3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ．

(21 東京工大 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $n = 2,\ 3$

【解答】

(1) (左辺) $-$ (右辺) $= 0$ を示す．

$$\begin{aligned}
&n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n - (n+1){}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}\\
&= n\frac{(2n)!}{n!\,n!} - (n+1)\frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}\\
&= \frac{(2n)!}{(n-1)!\,n!} - \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\\
&= 0
\end{aligned}$$

したがって，等式

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

が成り立つ． …… (証明終わり)

- 与えられた等式を組合せの意味から説明することもできる．
  $2n$ 人の中から代表 1 人がいる n 人の組を作ることを考える．
  「$2n$ 人の中から n 人選び，その n 人の中から代表を 1 人選ぶ」と考えたときの選び方の総数が左辺である．
  また，「$2n$ 人の中から $n-1$ 人選び，残った $n+1$ 人の中から代表となる 1 人を選ぶ」と考えたときの選び方の総数が右辺である．
  したがって，与えられた等式は成り立つ．

また，右辺の $(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ は $n+1$ の倍数だから左辺の $n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n$ も同じく $n+1$ の倍数である．このとき，n と $n+1$ は互いに素であるから，

${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数 …… (証明終わり)

である．

- n と $n+1$ は互いに素であることを確認しておく．
  n と $n+1$ の最大公約数を g とおくと

$$\begin{cases} n = ga \\ n+1 = gb \end{cases} \quad (a,\ b \text{ は互いに素})$$

と表すことができる．ただし $a < b$ である．このとき

$$ga + 1 = gb$$
$$\therefore \quad g(b-a) = 1$$

$b - a > 0$ より，$g = 1$ (かつ $b - a = 1$) であるから，n と $n+1$ は互いに素である．

n が 4 以上の整数ならば

$$a_n > n + 2 \qquad \cdots\cdots (*)$$

であることを数学的帰納法により示す．

(2) (i) $n = 4$ のとき

$$a_4 = \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{4+1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 14 > 4 + 2$$

であり，$n = 4$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ $(k \geqq 4)$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する．まず，a_{k+1} と a_k の関係を導く．

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{{}_{2(k+1)}\mathrm{C}_{k+1}}{(k+1)+1} = \frac{1}{k+2}\frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} \\ &= \frac{1}{k+2}\frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(k+1)^2 k!k!} \\ &= \frac{1}{k+2}\frac{2(2k+1)}{k+1}a_k \\ &= \frac{2(2k+1)}{k+2}a_k \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{k+1} = \frac{2(2k+1)}{n+2}a_k \qquad \cdots\cdots ①$$

① により

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \{(k+1)+2\} &= \frac{2(2k+1)}{k+2}a_k - (k+3) \\ &> \frac{2(2k+1)}{k+2} \times (k+2) - (k+3) \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\ &= 3k - 1 \\ &\geqq 3 \cdot 4 - 1 \quad (\because\ k \geqq 4) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より，n が 4 以上の整数ならば $a_n > n + 2$ が成り立つ． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

- a_n を書き出してみる．

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)\cdot n!\,n!} \\
&= \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+3)(n+2)}{n!} \\
&= \underbrace{\frac{(2n-1)\cdots(n+3)}{(n-1)\cdots 3}}_{\text{分母・分子はともに } n-3 \text{ 個の積}} \times(n+2) \\
&= \frac{2n-1}{n-1}\,\frac{2n-2}{n-2}\cdots\frac{n+3}{3}\times(n+2) \qquad \cdots\cdots \text{ア}
\end{aligned}$$

ここで，n は 4 以上の整数なので，$1 \leqq k \leqq n-3$ を満たす整数 k が存在し，この k に対して

$$2n-k = n+(n-k) > n-k$$

が成り立つ．したがって，ア は

$$a_n > \frac{n-1}{n-1}\,\frac{n-2}{n-2}\cdots\frac{3}{3}\times(n+2) = n+2$$

よって，n が 4 以上の整数ならば， $a_n > n+2$ が成り立つ．

(3) (1) の後半より，すべての正の整数 n に対して $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ は正の整数である．まずは

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{{}_2\mathrm{C}_1}{2} = 1, \\
a_2 &= \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{3} = \frac{4\cdot 3}{3\times 2\cdot 1} = 2, \\
a_3 &= \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{4} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{4\times 3\cdot 2\cdot 1} = 5, \\
a_4 &= \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{5} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 14
\end{aligned}$$

であるから，a_2，a_3 は素数であり，a_1，a_4 は素数でない．

次に，n が 4 以上の整数のとき，a_{n+1} は素数でないことを背理法で示す．

a_{n+1} が素数であると仮定する．① より

$$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$$

であり，素数 a_{n+1} は $2(2n+1)$，a_n いずれかの約数である．

(2) より

$$a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}a_n > \frac{2(2n+1)}{n+2}(n+2) = 2(2n+1)$$

であり，a_{n+1} は $2(2n+1)$ の約数ではない．

また，$2(2n+1) = 3n+n+2 > n+2$ より

$$a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}a_n > \frac{n+2}{n+2}a_n = a_n$$

であり，a_{n+1} は a_n の約数ではない．

これは a_{n+1} は $2(2n+1)$，a_n いずれかの約数であることに反する．したがって，n が 4 以上の整数のとき a_{n+1} は素数ではない．

以上より，a_n が素数となる正の整数 n の値は

$$\boldsymbol{n = 2,\ 3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．