a, b を $0<a<1$, $0<b<1$ を満たす実数とする．平面上の三角形 ABC を考え，辺 AB を $a:1-a$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1-b$ に内分する点を Q，辺 CA の中点を R とし，三角形 ABC の面積を S，三角形 PQR の面積を T とする．

(1) $\dfrac{T}{S}$ を a, b で表せ．

(2) a, b が $0<a<\dfrac{1}{2}$, $0<b<\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(3) p, q を 3 以上の整数とし，$a=\dfrac{1}{p}$, $b=\dfrac{1}{q}$ とする．$\dfrac{T}{S}$ の逆数 $\dfrac{S}{T}$ が整数となるような p, q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

(21 東北大 理 2)

【答】

(1) $\dfrac{T}{S}=ab-\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{1}{4}<\dfrac{T}{S}<\dfrac{1}{2}$

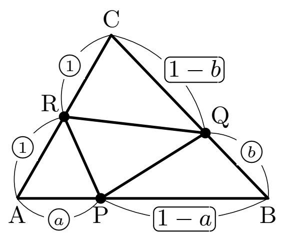
(3) $(p,\ q)=(4,\ 6),\ (6,\ 4)$

【解答】

(1) S は三角形 ABC の面積，T は三角形 PQR の面積であり，

$\triangle\mathrm{APR}=\dfrac{a}{2}S$, $\triangle\mathrm{BPQ}=b(1-a)S$, $\triangle\mathrm{CQR}=\dfrac{1-b}{2}S$

であるから



$$\begin{aligned}\frac{T}{S}&=\frac{S-(\triangle\mathrm{APR}+\triangle\mathrm{BPQ}+\triangle\mathrm{CQR})}{S}\\&=1-\frac{a}{2}-b(1-a)-\frac{1-b}{2}\\&=\boldsymbol{ab-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) の結果より

$$\frac{T}{S}=\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$$

である．a, b は $0<a<\dfrac{1}{2}$, $0<b<\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くから，$-\dfrac{1}{2}<a-\dfrac{1}{2}<0$, $-\dfrac{1}{2}<b-\dfrac{1}{2}<0$ であり，これらは独立に動くから，$\dfrac{T}{S}$ がとりうる値の範囲は

$$0^2+\frac{1}{4}<\frac{T}{S}<\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

すなわち

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}<\frac{T}{S}<\frac{1}{2}}\quad\cdots\cdots(答)$$

である．

- まず b を $0<b<\dfrac{1}{2}$ の範囲で固定し，a を $0<a<\dfrac{1}{2}$ の範囲で動かす．

$$\frac{T}{S}=\left(b-\frac{1}{2}\right)a-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$$

$\left(-\dfrac{1}{2}<\right)b-\dfrac{1}{2}<0$ であり，a について単調減少であるから

$$\left(b-\frac{1}{2}\right)\cdot 0-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}>\frac{T}{S}>\left(b-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}<\frac{T}{S}<-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$$

ついで，b を $0<b<\dfrac{1}{2}$ の範囲で動かす．$-\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}$ は単調減少であるから

$$\frac{1}{4}<\frac{T}{S}<-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}<\frac{T}{S}<\frac{1}{2}$$

である．

(3) (1) の結果に $a=\dfrac{1}{p}$, $b=\dfrac{1}{q}$ を代入すると

$$\frac{T}{S}=\frac{1}{pq}-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}=\frac{2-q-p+pq}{2pq}\qquad\cdots\cdots ①$$

である．

p, q は 3 以上の整数であるから，$p>2$, $q>2$ であり，$0<a<\dfrac{1}{2}$, $0<b<\dfrac{1}{2}$ という (2) の条件を満たす．したがって，(2) の結果から

$$2<\frac{S}{T}<4$$

であり，$\dfrac{S}{T}$ が整数となるのは $\dfrac{S}{T}=3$ のみである．①とあわせて

$$\frac{2pq}{pq-p-q+2}=3 \iff pq-3p-3q+6=0$$

$$\therefore\quad (p-3)(q-3)=3$$

である．$p-3\geqq 0$, $q-3\geqq 0$ であるから

$$(p-3,\ q-3)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

すなわち

$$\boldsymbol{(p,\ q)=(4,\ 6),\ (6,\ 4)}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．