虚部が正で $|z|=\sqrt{3}$ となる複素数 z に対して，複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(z^2)$，$\mathrm{C}(z^3)$ を考える．$\angle\mathrm{BAC}$ が直角となるとき，z を求めよ．

(21 三重大 工・医 1(3))

【答】 $z=-1+\sqrt{2}i$

【解答】

$\angle\mathrm{BAC}$ が直角となる　$\cdots\cdots$ $(*)$

$(*)$ であるためには$\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(z^2)$，$\mathrm{C}(z^3)$ が互いに異なることが必要であり

$$\begin{cases} z-z^2 \neq 0 \\ z^2-z^3 \neq 0 \\ z^3-z \neq 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad z \neq 0,\ \pm 1$$

である．このとき

$$\begin{aligned} (*) &\iff \frac{z^3-z}{z^2-z} \text{ が純虚数である} \\ &\iff z+1 \text{ が純虚数である} \\ &\iff (z+1)+\overline{(z+1)}=0 \\ &\iff z+\overline{z}=-2 \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

また，z は $|z|=\sqrt{3}$ すなわち

$$z\overline{z}=3 \qquad \cdots\cdots ②$$

でもある．①, ② から，z, $\overline{z}$ は 2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の解であり

$$x=-1\pm\sqrt{2}i$$

である．求める z の虚部は正であるから

$$\boldsymbol{z=-1+\sqrt{2}i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．