θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ をみたす定数とし，x の 2 次方程式

$$x^2-(4\cos\theta)x+\frac{1}{\tan\theta}=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $(*)$ が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ．

(2) θ が (1) で求めた範囲にあるとし，$(*)$ の 2 つの虚数解を α, β とする．ただし，α の虚部は β の虚部より大きいとする．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{O}(0)$ を通る円の中心を $\mathrm{C}(\gamma)$ とするとき，θ を用いて γ を表せ．

(3) 点 O，A，C を (2) のように定めるとき，三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan\theta$ の値を求めよ．

(21 九州大 理系 2)

【答】

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{12}$

(2) $\gamma=\dfrac{1}{4\sin\theta}$

(3) $\tan\theta=4-\sqrt{15}$

【解答】

(1) $$x^2-(4\cos\theta)x+\frac{1}{\tan\theta}=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

$(*)$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(2\cos\theta)^2-\frac{1}{\tan\theta}=4\cos^2\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\cos\theta(4\sin\theta\cos\theta-1)}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta(2\sin2\theta-1)}{\sin\theta}\end{aligned}$$

である．よって，$(*)$ が実数解をもたない条件は

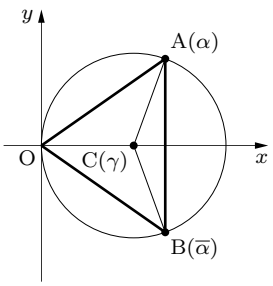
$$\begin{aligned}&\frac{D}{4}<0 \iff 2\sin2\theta-1<0 \quad \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\ \text{より}\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}>0\right)\\&\iff \sin2\theta<\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$0<2\theta<\frac{\pi}{6} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{0<\theta<\frac{\pi}{12}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $(*)$ は実数係数の方程式だから，①のとき $\beta=\overline{\alpha}$ である．すると 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\overline{\alpha})$ は実軸に関して対称だから，円の中心 $\mathrm{C}(\gamma)$ は実軸上にあり，γ は実数である．



OC = CA だから

$$\begin{aligned}&|\gamma|=|\gamma-\alpha|\\&\iff |\gamma|^2=|\gamma-\alpha|^2\\&\iff \gamma^2=(\gamma-\alpha)(\gamma-\overline{\alpha}) \quad (\because\ \gamma\ \text{は実数})\\&\iff \gamma^2=\gamma^2-\gamma\overline{\alpha}-\gamma\alpha+\alpha\overline{\alpha}\\&\iff (\alpha+\overline{\alpha})\gamma=\alpha\overline{\alpha}\end{aligned}$$

解と係数の関係より

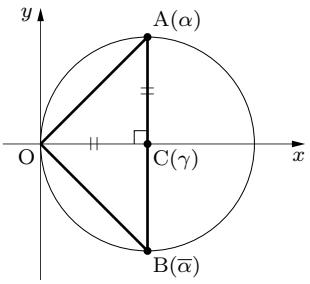
$$(4\cos\theta)\gamma = \frac{1}{\tan\theta}$$

① より，$\cos\theta \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{4\sin\theta}}$$ ……(答)

である．

(3) △OAC は OC = CA の二等辺三角形だから



$$\angle \mathrm{AOC} \neq \frac{\pi}{2}, \quad \angle \mathrm{OAC} \neq \frac{\pi}{2}$$

であり，三角形 OAC が直角三角形になる条件は

$$\angle \mathrm{OCA} = \frac{\pi}{2}$$

である．

$$\angle \mathrm{OCA} = \frac{\pi}{2} \iff (\alpha \text{ の実部}) = \gamma$$

$$\iff 2\cos\theta = \frac{1}{4\sin\theta}$$

であり，これを $\tan\theta$ で表すと

$$8\sin\theta\cos\theta = 1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

$$8\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$8\tan\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\tan^2\theta - 8\tan\theta + 1 = 0$$

$$\therefore \quad \tan\theta = 4 \pm \sqrt{15}$$

ここで，① より

$$0 < \tan\theta < \tan\frac{\pi}{12}$$

である．

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

であり

$$(2-\sqrt{3}) - (4-\sqrt{15}) = \sqrt{15} - \sqrt{3} - 2 = \frac{15 - (\sqrt{3}+2)^2}{\sqrt{15}+\sqrt{3}+2}$$

$$= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{15}+\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{64} - \sqrt{48}}{\sqrt{15}+\sqrt{3}+2}$$

$$> 0$$

であるから

$$0 < 4 - \sqrt{15} < 2 - \sqrt{3} < 4 + \sqrt{15}$$

である．よって

$$\boldsymbol{\tan\theta = 4 - \sqrt{15}}$$ ……(答)

である．

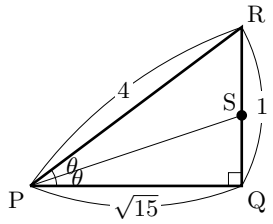
- $\angle \mathrm{OCA} = \dfrac{\pi}{2}$ については，以下のようにしてもよい．

$$\begin{aligned}
\angle \mathrm{OCA} = \frac{\pi}{2} &\iff \arg \frac{\alpha-\gamma}{0-\gamma} = \pm\frac{\pi}{2} \\
&\iff \frac{\gamma-\alpha}{\gamma} \text{ は純虚数である} \\
&\iff \frac{\gamma-\alpha}{\gamma} + \overline{\left(\frac{\gamma-\alpha}{\gamma}\right)} = 0 \quad \left(\because\ \frac{\gamma-\alpha}{\gamma} \neq 0\right) \\
&\iff \frac{2\gamma-\alpha-\overline{\alpha}}{\gamma} = 0 \quad (\because\ \gamma \text{ は実数}) \\
&\iff 2\cdot\frac{1}{4\sin\theta} - 4\cos\theta = 0 \quad (\because\ (2) \text{ および解と係数の関係}) \\
&\iff 8\sin\theta\cos\theta = 1 \quad \left(\because\ 0 < \theta < \frac{\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

以下同じ．

- $(*) \iff \sin 2\theta = \dfrac{1}{4}$

右の直角三角形 PQR を考えると



$$\mathrm{QS} : \mathrm{SR} = \mathrm{PQ} : \mathrm{PR} = \sqrt{15} : 4$$

であるから

$$\mathrm{QS} = \frac{\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}} \times 1 = \frac{\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}$$

よって

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\dfrac{\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{4+\sqrt{15}} = 4-\sqrt{15}$$

である．