$z^2=-4i$ を満たす複素数 z を求めなさい．なお $i=\sqrt{-1}$ である．

(21 公立千歳科技大 中期 理工 1(4))

【答】 $z=\pm(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)$

【解答】

$$z^2=-4i \qquad \cdots\cdots ①$$

$z=x+yi$ (x, y は実数) とおく

$$① \iff x^2-y^2+2xyi=-4i$$

$$\iff \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=-4 \end{cases} \qquad (\because \text{ 複素数の相等})$$

$$\iff \begin{cases} (x+y)(x-y)=0 \\ xy=-2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-x \\ -x^2=-2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y=x \\ x^2=-2 \text{ (これを満たす実数 } x \text{ は存在しない)} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} y=-x \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{z=\pm(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，ド・モアブルの定理より

$$① \iff r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=4\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\iff \begin{cases} r^2=4 \\ 2\theta=\dfrac{3}{2}\pi+2n\pi \ (n \text{ は整数}) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} r=2\ (>0) \\ \theta=\dfrac{3}{4}\pi+n\pi \end{cases}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ であるから

$$\begin{aligned} z&=2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right),\ 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right) \\ &=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),\ 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &=\pm(\sqrt{2}-\sqrt{2}i) \end{aligned}$$

である．