以下の問いに答えよ．

(1) $w=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とする．ただし，i は虚数単位である．z を 0 でない複素数とするとき，次の等式を証明せよ．

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)=z^5-\frac{1}{z^5}$$

(2) ある定数 C に対して，等式

$$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)=C\sin 5\theta$$

がすべての実数 θ で成り立つことを示せ．また，C の値を求めよ．

(3) $\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}$ の値を求めよ．

(21 千葉大 7)

【答】

(1) 略

(2) 証明は略．$C=\dfrac{1}{16}$

(3) $\dfrac{1}{4}$

【解答】

(1) $\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\left(wz-\dfrac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\dfrac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\dfrac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\dfrac{1}{w^4z}\right)=z^5-\dfrac{1}{z^5}$ …… $(*)$

$$((*)\text{ の右辺})=\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^4+z^2+1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}\right)$$

より

$$(*)\iff\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)$$
$$=z^4+z^2+1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}\qquad\cdots\cdots(**)$$

であり，$(**)$ が成り立つことを示す．

ド・モアブルの定理より

$$w^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1\qquad\therefore\quad w^5=1$$

である．これより

$$\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)=w^5z^2-\frac{1}{w^3}-w^3+\frac{1}{w^5z^2}=z^2+\frac{1}{z^2}-(w^2+w^3)$$
$$\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)=w^5z^2-\frac{1}{w}-w+\frac{1}{w^5z^2}=z^2+\frac{1}{z^2}-(w+w^4)$$

であり

$$((**)\text{ の左辺})$$
$$=\left\{z^2+\frac{1}{z^2}-(w^2+w^3)\right\}\left\{z^2+\frac{1}{z^2}-(w+w^4)\right\}$$
$$=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-(w+w^2+w^3+w^4)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+(w^3+w^4+w^6+w^7)$$
$$=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-(w+w^2+w^3+w^4)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+(w+w^2+w^3+w^4)$$

ここで，$w^5=1$ より

$$(w-1)(w^4+w^3+w^2+w+1)=0$$

w は虚数であり，$w\neq 1$ から

$$w^4+w^3+w^2+w+1=0$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}&((**)\text{ の左辺})\\&=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-(-1)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+(-1)\\&=\left(z^4+2z^2\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-1\\&=z^4+z^2+1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}\end{aligned}$$

となる．よって，$(**)$ が示された．　……(証明終わり)

- $z^5-\dfrac{1}{z^5}=\dfrac{z^{10}-1}{z^5}=\dfrac{(z^2)^5-1}{z^5}$

  ここで，$(w^k)^5=(w^5)^k=1$ であるから，w^k $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は $x^5-1=0$ の異なる解であり

  $$z^5-\frac{1}{z^5}=\frac{(z^2-1)(z^2-w)(z^2-w^2)(z^2-w^3)(z^2-w^4)}{z^5}$$

  と変形できる．また，$w^5=1,\ w^{10}=1$ を用いると

  $$\begin{aligned}((*)\text{ の左辺})&=\frac{z^2-1}{z}\cdot\frac{w^2z^2-1}{wz}\cdot\frac{w^4z^2-1}{w^2z}\cdot\frac{w^6z^2-1}{w^3z}\cdot\frac{w^8z^2-1}{w^4z}\\&=\frac{w^{20}}{w^{10}z^5}(z^2-1)\left(z^2-\frac{1}{w^2}\right)\left(z^2-\frac{1}{w^4}\right)\left(z^2-\frac{1}{w^6}\right)\left(z^2-\frac{1}{w^8}\right)\\&=\frac{1}{z^5}(z^2-1)(z^2-w^3)(z^2-w)(z^2-w^4)(z^2-w^2)\\&=\frac{1}{z^5}(z^2-1)(z^2-w)(z^2-w^2)(z^2-w^3)(z^2-w^4)\end{aligned}$$

  よって，$(*)$ は示された．

(2)　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(\neq 0)$ とおくと，0 以上の整数 n において

$$\begin{aligned}w^nz&=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^n(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\cos\left(\theta+\frac{2n\pi}{5}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{2n\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

である．また，$|w^nz|=1$ であり

$$w^nz\cdot\overline{(w^nz)}=1\qquad\therefore\quad\frac{1}{w^nz}=\overline{w^nz}$$

が成り立つから

$$w^nz-\frac{1}{w^nz}=w^nz-\overline{w^nz}=2i\sin\left(\theta+\frac{2n\pi}{5}\right)$$

である．これより

$$\begin{aligned}&((*)\text{ の左辺})\\&=(2i\sin\theta)\left\{2i\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\right\}\left\{2i\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\right\}\left\{2i\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\right\}\left\{2i\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)\right\}\\&=(2i)^5\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

また，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき

$$z^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta$$

であり，$|z^5|=1$ から，$\dfrac{1}{z^5}=\overline{z^5}$ が成り立つから

$$z^5-\frac{1}{z^5}=z^5-\overline{z^5}=2i\sin 5\theta$$

である．したがって，(1) の等式は

$$(2i)^5\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)=2i\sin 5\theta$$

$$\therefore\quad \sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)=\frac{1}{16}\sin 5\theta$$

がすべての実数 θ で成り立つ．　……(証明終わり)

これより，C の値は

$$\boldsymbol{C=\frac{1}{16}}$$　……(答)

である．

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{10}$ のとき，(2) の等式は

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{5\pi}{10}\sin\frac{9\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}\sin\frac{17\pi}{10}=\frac{1}{16}\sin\frac{5\pi}{10}$$

$$\sin\frac{\pi}{10}\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{10}\left(-\sin\frac{3\pi}{10}\right)\left(-\sin\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{1}{16}\cdot 1$$

$$\left(\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}\right)^2=\frac{1}{16}$$

$\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}>0$ であり

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$　……(答)

である．