複素数 α は $|\alpha|=1$ を満たしている．

(1) 条件

$$(*)\quad |z|=c \text{ かつ } |z-\alpha|=1$$

を満たす複素数 z がちょうど 2 つ存在するような実数 c の範囲を求めよ．

(2) 実数 c は (1) で求めた範囲にあるとし，条件 $(*)$ を満たす 2 つの複素数を z_1，z_2 とする．このとき，$\dfrac{z_1-z_2}{\alpha}$ は純虚数であることを示せ．

(21 学習院大 理・文 2)

【答】

(1) $0<c<2$

(2) 略

【解答】

(1) まず，$|z|=c$ (c は実数) を満たす複素数 z が 2 つ存在するためには

$$c>0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が必要である．このとき

$|z|=c$ は中心が原点で半径が c の円である．

$|z-\alpha|=1$ は中心が点 α で半径が 1 の円を表すから

$$(*)\quad |z|=c \text{ かつ } |z-\alpha|=1$$

を満たす複素数 z がちょうど 2 つ存在する条件は

(半径の差) < (中心間の距離) < (半径の和)

が成り立つことである．

$$|c-1|<|\alpha|<c+1$$
$$|c-1|<1<c+1 \quad (\because\ |\alpha|=1)$$
$$\therefore\quad -1<c-1<1 \text{ かつ } 1<c+1$$
$$\therefore\quad 0<c<2$$

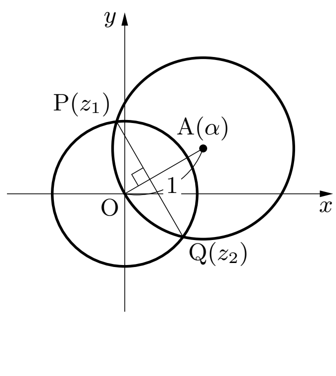
となり，これは①も満たす．

よって，求める実数 c の範囲は

$$\boldsymbol{0<c<2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 複素数平面上で $\mathrm{P}(z_1)$，$\mathrm{Q}(z_2)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{O}(0)$ とすると，$0<c<2$ のもとでは，線分 PQ は 2 つの円の共通弦であるから，PQ は 2 つの円の中心を通る直線 OA に垂直である．よって



$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$から$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$まで測った角は $\pm\dfrac{\pi}{2}$ である

$\iff$ $\arg\dfrac{z_1-z_2}{\alpha-0}=\pm\dfrac{\pi}{2}$

$\iff$ $\dfrac{z_1-z_2}{\alpha}$ は純虚数である $\cdots\cdots$ (証明終わり)

である．