z^2 による三角形の像と面積

複素数 $\alpha=2+i$, $\beta=-\dfrac{1}{2}+i$ に対応する複素数平面上の点を $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 複素数平面上の点 $\mathrm{C}(\alpha^2)$，$\mathrm{D}(\beta^2)$ と原点 O の 3 点は一直線上にあることを示せ．

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 AB 上を動くとき，z^2 の実部を x，虚部を y として，点 $\mathrm{Q}(z^2)$ の軌跡を x, y の方程式で表せ．

(3) 点 $\mathrm{P}(z)$ が三角形 OAB の周および内部にあるとき，点 $\mathrm{Q}(z^2)$ 全体のなす図形を K とする．K を複素数平面上に図示せよ．

(4) (3) の図形 K の面積を求めよ．

(21 早稲田大 基幹理工・創造理工・先進理工 3)

【答】

(1) 略

(2) $x=\dfrac{y^2}{4}-1$

(3) 略

(4) $\dfrac{125}{24}$

【解答】

(1) $\alpha=2+i$, $\beta=-\dfrac{1}{2}+i$ より

$$\alpha^2=(2+i)^2=3+4i,$$
$$\beta^2=\left(-\frac{1}{2}+i\right)^2=-\frac{3}{4}-i=-\frac{1}{4}\alpha^2$$

であり，$\mathrm{C}(\alpha^2)$，$\mathrm{D}(\beta^2)$ について $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つ．

よって，3 点 C，D，O は一直線上にある．　……(証明終わり)

(2) α, β はどちらも虚部が 1 なので，直線 AB 上の点 $\mathrm{P}(z)$ は

$$z=t+i\ (t\ \text{は実数})$$

と表すことができる．このとき

$$z^2=(t+i)^2=(t^2-1)+2ti$$

であり，z^2 の実部を x，虚部を y とすると

$$\begin{cases} x=t^2-1 & \cdots\cdots ① \\ y=2t & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．点 $\mathrm{Q}(z^2)$ の軌跡は ① かつ ② を満たす実数 t が存在するような点の集合であり

$$「① かつ ②」\iff \begin{cases} t=\dfrac{y}{2} \\ x=\left(\dfrac{y}{2}\right)^2-1 \end{cases}$$

であるから，求める方程式は $\boldsymbol{x = \dfrac{y^2}{4} - 1}$ である． ……(答)

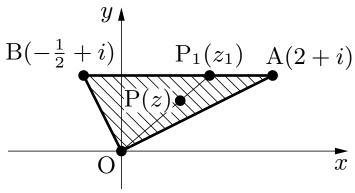
(3) 三角形 OAB の周および内部の点 P(z) は

$$z = k(t+i) \quad \left(t,\ k \text{ は } -\frac{1}{2} \leqq t \leqq 2,\ 0 \leqq k \leqq 1 \text{ をみたす実数}\right)$$

と表すことができ，Q(z^2) は

$$z^2 = k^2(t+i)^2$$

である．

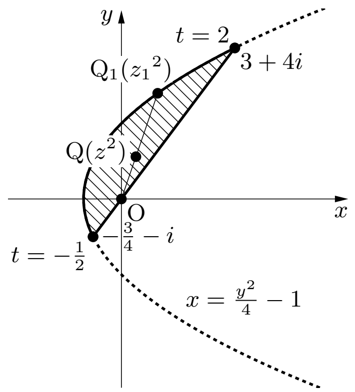


t を固定し，k を $0 \leqq k \leqq 1$ の範囲で動かす．$k=1$ のときの点 P を P$_1(z_1)$，点 Q を Q$_1({z_1}^2)$ とおくと，P(z) は線分 OP$_1$ 上を動き，Q(z^2) は線分 OQ$_1$ 上を動く．

ついで，t を $-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 2$ の範囲で動かすと，P$_1(z_1)$ は線分 AB 上を動き，点 Q$_1({z_1}^2)$ は (2) の放物線上を動くから，点 Q(z^2) 全体のなす図形 K は，t が $-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 2$ の範囲で動くときの (2) の放物線の上の点，すなわち

$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \text{ かつ } -1 \leqq y \leqq 4$$

上の点 Q$_1$ と原点 O を結ぶ線分 OQ$_1$ が通過する領域である．



(1) も考慮して，これを図示すると右図の斜線部分となる．境界も含む．

(4) K の境界となっている直線の方程式が $x = \dfrac{3}{4}y$ であることに注意すると，求める面積は

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{4} \left\{ \frac{3}{4}y - \left(\frac{y^2}{4} - 1 \right) \right\} dy \\
&= -\frac{1}{4} \int_{-1}^{4} (y+1)(y-4)\, dy \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{\{4-(-1)\}^3}{6} \\
&= \boldsymbol{\frac{125}{24}}
\end{aligned}$$

……(答)

である．