平面上に半径がそれぞれ a^2, b^2, c^2 $(0<a<b<c)$ の 3 つの円 A, B, C および直線 ℓ がある．3 つの円はどれも直線 ℓ に接していて，どの 2 つの円も外接しているとする．

(1) c を a と b を用いて表せ．

(2) 数列 a, b, c が等比数列となるとき，その公比を求めよ．

(21 千葉大 2)

【答】

(1) $c=\dfrac{ab}{b-a}$

(2) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

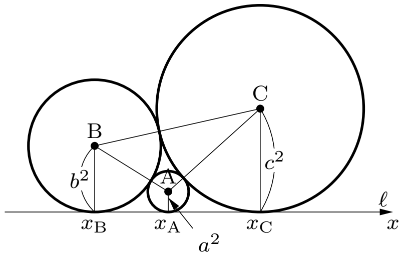
【解答】

(1) 半径が a^2, b^2, c^2 $(0<a<b<c)$ の 3 つの円 A, B, C はどれも直線 ℓ に接しているから，

$$(\text{中心と } \ell \text{の距離}) = (\text{半径})$$

であり，どの 2 つの円も外接しているから 3 つの円は ℓ に関して同じ側にある．ℓ を x 軸にとると中心の座標はそれぞれ

$$\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},\ a^2\right),\ \mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}},\ b^2\right),\ \mathrm{C}\left(x_{\mathrm{C}},\ c^2\right)$$



とおくことができる．さらに，どの 2 つの円についても

$$(\text{中心間の距離}) = (\text{半径の和})$$

が成り立つから

$$\begin{cases} \sqrt{(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})^2+(a^2-b^2)^2}=a^2+b^2 & \cdots\cdots ① \\ \sqrt{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{C}})^2+(b^2-c^2)^2}=b^2+c^2 & \cdots\cdots ② \\ \sqrt{(x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{A}})^2+(c^2-a^2)^2}=c^2+a^2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．① を変形すると

$$① \iff (x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})^2+(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)^2$$
$$\therefore\quad (x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})^2=4a^2b^2$$
$$\therefore\quad |x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}|=2ab \quad (\because\ a>0,\ b>0) \qquad \cdots\cdots ①'$$

となる．同じく，②, ③ より

$$|x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{C}}|=2bc \quad (\because\ b>0,\ c>0) \qquad \cdots\cdots ②'$$
$$|x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{A}}|=2ca \quad (\because\ c>0,\ a>0) \qquad \cdots\cdots ③'$$

を得る．$0<a<b<c$ より円 A は ℓ と 2 円 B, C に囲まれており

$$|x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}|+|x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{A}}|=|x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{C}}|$$

が成り立つから

$$2ab+2ca=2bc \qquad \therefore\quad \boldsymbol{c=\frac{ab}{b-a}} \qquad \cdots\cdots ④ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 数列 $a,\ b,\ c\ (0 < a < b < c)$ が等比数列となる条件は

$$ac = b^2$$

であり，④ を代入すると

$$a \cdot \frac{ab}{b-a} = b^2$$

$$a^2 = b(b-a) \quad (\because\ b \fallingdotseq 0,\ b-a \fallingdotseq 0)$$

となる．辺々 $a^2 (\fallingdotseq 0)$ で割ると

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

である．$\dfrac{b}{a} > 1$ であるから，公比 $\dfrac{b}{a}$ の値は

$$\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．