実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = 2^{\left[\sqrt{k}\right]} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義する．正の整数 n に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$$

を求めよ．

(21 一橋大 2)

【答】 $b_n = (n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$

【解答】

正の整数 l に対して

$$\left[\sqrt{l^2}\,\right] = \left[\sqrt{l^2+1}\,\right] = \left[\sqrt{l^2+2}\,\right] = \cdots = \left[\sqrt{(l+1)^2-1}\,\right] = l$$

であるから，数列 $\{a_k\}$ には値が 2^l である項が

$$\{(l+1)^2-1\} - (l^2-1) = 2l+1 \quad (\text{個})$$

ある．したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n^2} a_k = \left(\sum_{l=1}^{n-1} (2l+1)\cdot 2^l\right) + a_{n^2} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{n-1} (2l+1)\cdot 2^l\right) + 2^n \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

である．

ここで，$S = \sum\limits_{l=1}^{n-1} (2l+1)\cdot 2^l$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= 3\cdot 2^1 + 5\cdot 2^2 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1} \\ 2S &= \qquad\qquad 3\cdot 2^2 + \cdots + (2n-3)\cdot 2^{n-1} + (2n-1)\cdot 2^n \end{aligned}$$

辺々を引くと

$$\begin{aligned} -S &= 6 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + \cdots + 2\cdot 2^{n-1} - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= 6 + \frac{8(2^{n-2}-1)}{2-1} - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= 2^{n+1} - 2 - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= -(2n-3)\cdot 2^n - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad S = (2n-3)\cdot 2^n + 2$$

したがって，① は

$$\begin{aligned} b_n &= (2n-3)\cdot 2^n + 2 + 2^n \\ &= (2n-2)\cdot 2^n + 2 \\ &= (n-1)\cdot 2^{n+1} + 2 \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

となる．

$$b_1 = \sum_{k=1}^{1^2} a_k = a_1 = 2$$

なので，$n=1$ のときも ②は成り立つ．よって，求める和は

$$\boldsymbol{b_n = (n-1)\cdot 2^{n+1} + 2} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．