初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で表される数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ．

(21 北海道大 文 1)

【答】

(1) $a_n=n(n+1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

【解答】

$$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)\quad(n\geqq 1)\qquad\cdots\cdots ①$$

(1) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n+5)\}\\&=\frac{1}{6}n\{(2n^2+9n+7)-(2n^2+3n-5)\}\\&=\frac{1}{6}n(6n+12)\\&=n(n+2)\qquad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

となる．また，①で $n=1$ とおくと

$$a_1=S_1=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 9=3\qquad\cdots\cdots ③$$

となり，③ は ② で $n=1$ とおいた値と一致する．

よって，$\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n=n(n+2)}\quad(n\geqq 1)\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) の結果より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$n\geqq 2$ のときは

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}\qquad\cdots\cdots ④\end{aligned}$$

$n=1$ のときは

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}\qquad\cdots\cdots ⑤$$

となり，⑤ は ④ で $n=1$ とおいた値と一致する．

よって

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}\quad(n\geqq 1)\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．