m を正の整数とする．座標平面上の点 $(x,\ y)$ で

$$xn^3+yn^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

がすべて整数であるようなものは，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x+y \leqq m$$

の表す領域に何個あるか答えよ．

(21 千葉大 4)

【答】 $(m+1)^2$

【解答】

$$\text{「}xn^3+yn^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\ \text{がすべて整数である」} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

$n=1$ のとき，$(*)$ より

$$\text{「}x+y\ \text{は整数である」} \qquad \cdots\cdots\ ①$$

ことが必要である．

$n=2$ のとき

$$2^3x+2^2y=8x+4y=4x+4(x+y)$$

$$\therefore \quad 4x=(2^3x+2^2y)-4(x+y)$$

であり，$(*)$ かつ①より

$$\text{「}4x\ \text{は整数である」} \qquad \cdots\cdots\ ②$$

ことが必要である．

$n=3$ のとき

$$3^3x+3^2y=27x+9y=18x+9(x+y)=2x+4\cdot(4x)+9(x+y)$$

$$\therefore \quad 2x=(3^3x+3^2y)-4\cdot(4x)-9(x+y)$$

であり，$(*)$，②，①より

$$\text{「}2x\ \text{は整数である」} \qquad \cdots\cdots\ ③$$

ことが必要である (③ならば②は成り立つ).

$n=4$ のとき

$$4^3x+4^2y=64x+16y=24\cdot(2x)+16(x+y)$$

であり，③, ① より $(*)$ を満たす.

これまでの議論により，$(*)$ が成り立つならば，①かつ③が成り立つことが必要である．

逆に，①かつ③が成り立つならば $(*)$ が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned} xn^3+yn^2 &= xn^3+(x+y)n^2-xn^2 \\ &= xn^2(n-1)+(x+y)n^2 \end{aligned}$$

隣り合う整数の積は 2 の倍数であるから $n^2(n-1)$ は 2 の倍数であり，③より $xn^2(n-1)$ は整数である．また，①より $(x+y)n^2$ も整数である．

よって，すべての正の整数 n に対して $(*)$ は成り立つ．

次に，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x+y \leqq m \qquad \cdots\cdots\ (**)$$

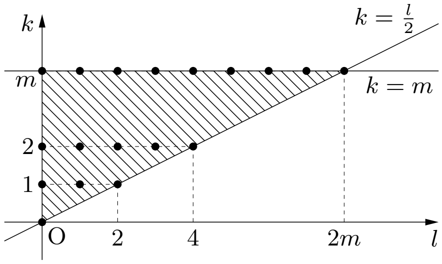
の表す領域にある点 $(x,\ y)$ の個数を求める．$x,\ y$ は①かつ③を満たすから

$$x+y=k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)\ \text{かつ}\ 2x=l\ (l\ \text{は整数})$$

とおくことができる．点 $(x,\ y)=\left(\dfrac{l}{2},\ k-\dfrac{l}{2}\right)$ であり $(x,\ y)$ と $(l,\ k)$ は 1 対 1 に対応するから，$(x,\ y)$ の個数は

$$(**) \iff \begin{cases} \dfrac{l}{2} \geqq 0 \\ k - \dfrac{l}{2} \geqq 0 \\ k \leqq m \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} l \geqq 0 \\ \dfrac{l}{2} \leqq k \leqq m \end{cases}$$



を満たす $(l,\ k)$ の個数と一致する．

k を固定したとき，l は $l = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2k$ の値をとるから，$(l,\ k)$ は $2k+1$ 個ある．

よって，求める個数は

$$\sum_{k=0}^{m}(2k+1) = \frac{(m+1)\{1+(2m+1)\}}{2} = \boldsymbol{(m+1)^2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．