1 から 30 までの 30 個の異なる整数を並べたものを $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_{29}$, $a_{30}$ と書くことにし，31 から 60 までの 30 個の異なる整数を並べたものを $b_1$, $b_2$, $\cdots$, $b_{29}$, $b_{30}$ と書くことにする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} a_k = \boxed{\text{アイウ}}$ となる．

(2) $0 < l < m,\ 0 < p_1 < p_2$ とすると

$$lp_{\boxed{\text{エ}}} + mp_{\boxed{\text{オ}}} < lp_{\boxed{\text{オ}}} + mp_{\boxed{\text{エ}}} \qquad \left(\boxed{\text{エ}} \fallingdotseq \boxed{\text{オ}}\right)$$

(3) 順列 $b_1$, $\cdots$, $b_{30}$ のとり方をいろいろ変えたとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} kb_k$ の最小値は $\boxed{\text{カキクケコ}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{サシスセソ}}$ である．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} ka_k$ が最小となるように順列 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_{30}$ をとり固定する．1 から 30 までの 30 個の異なる整数を並べたものを $c_1$, $c_2$, $\cdots$, $c_{30}$ とし，これらの取り方をいろいろ変えたとき，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} ka_kc_k$ の最小値は $\boxed{\text{タチツテト}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{ナニヌネノ}}$ である．

(21 東北医薬大 医 2)

---

【答】

| アイウ | エ | オ | カキクケコ | サシスセソ | タチツテト | ナニヌネノ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 465 | 2 | 1 | 18910 | 23405 | 60080 | 93680 |

---

【解答】

(1) 数列 $\{a_n\}$ は 1 から 30 までの 30 個の異なる整数を並べたものであり，小さい方から並べても和は変わらないから

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{30} k = \frac{30(30+1)}{2} = \mathbf{465} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

(2) $lp_1 + mp_2$ と $lp_2 + mp_1$ の大小を調べる．

$$\begin{aligned}
&(lp_1 + mp_2) - (lp_2 + mp_1) \\
&= l(p_1 - p_2) + m(p_2 - p_1) \\
&= (m - l)(p_2 - p_1) \\
&> 0 \quad (\because\ l < m,\ p_1 < p_2)
\end{aligned}$$

したがって

$$\boldsymbol{lp_2 + mp_1 < lp_1 + mp_2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $$\sum_{k=1}^{30} kb_k = 1b_1 + 2b_2 + \cdots + 30b_{30} \qquad \cdots\cdots ①$$

- 最小値について

(i) $b_1 = 60$ のとき

$$① = 1 \cdot 60 + (\text{他の 29 項の和})$$

(ii) $b_1 \fallingdotseq 60$ のとき，$b_i = 60$ となる $i$ が存在する．この 2 項 $1 \cdot b_1,\ i \cdot b_i\ (= i \cdot 60)$ に着目すると，$0 < 1 < i,\ 0 < b_1 < 60 (= b_i)$ であるから，(2) を利用することができ

$$① = 1 \cdot b_1 + i \cdot 60 + (\text{他の 28 項の和}) > 1 \cdot 60 + i \cdot b_1 + (\text{他の 28 項の和})$$

が成り立つ．

(i)，(ii) より

$$① \geqq 1 \cdot 60 + (29\text{ 項の和})$$

が成り立つ．これを繰り返すと

$$① \geqq 1 \cdot 60 + 2 \cdot 59 + \cdots + 29 \cdot 32 + 30 \cdot 31$$

を得る．求める最小値は

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 60 + 2 \cdot 59 + \cdots + 29 \cdot 32 + 30 \cdot 31 \\
&= \sum_{k=1}^{30} k(61 - k) \\
&= 61 \sum_{k=1}^{30} k - \sum_{k=1}^{30} k^2 \\
&= 61 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 - \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 \\
&= \mathbf{18910}
\end{aligned}$$

……(答)

- 最大値についても，同じく考える．

(i) $b_1 = 31$ のとき

$$① = 1 \cdot 31 + (\text{他の 29 項の和})$$

(ii) $b_1 \fallingdotseq 31$ のとき，$b_i = 31$ となる $i$ が存在する．この 2 項 $1 \cdot b_1,\ i \cdot b_i\ (= i \cdot 31)$ に着目すると，$0 < 1 < i,\ 0 < 31\ (= b_i) < b_1$ であるから，(2) を利用することができ

$$① = 1 \cdot b_1 + i \cdot 31 + (\text{他の 28 項の和}) < 1 \cdot 31 + i \cdot b_1 + (\text{他の 28 項の和})$$

が成り立つ．

(i)，(ii) より

$$① \leqq 1 \cdot 31 + (29\text{ 項の和})$$

が成り立つ．これを繰り返すと

$$① \leqq 1 \cdot 31 + 2 \cdot 32 + \cdots + 29 \cdot 59 + 30 \cdot 60$$

を得る．求める最大値は

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 31 + 2 \cdot 32 + \cdots + 29 \cdot 59 + 30 \cdot 60 \\
&= \sum_{k=1}^{30} k(30 + k) \\
&= 30 \sum_{k=1}^{30} k + \sum_{k=1}^{30} k^2 \\
&= 30 \times \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 + \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 \\
&= \mathbf{23405}
\end{aligned}$$

……(答)

である．

(4) (3) と同様に考えれば，$\sum_{k=1}^{30} ka_k$ が最小となる順列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{30}$$

のとき，すなわち $a_1 = 30$, $a_2 = 29$, $\cdots$, $a_{30} = 1$ であり

$$a_k = 31 - k$$

のときである．

1 から 30 までの 30 個の異なる整数を並べたものを $c_1$, $c_2$, $\cdots$, $c_{30}$ として

$$\sum_{k=1}^{30} ka_kc_k = \sum_{k=1}^{30} k(31-k)c_k \qquad \cdots\cdots ②$$

の最小値，最大値を求める．

$f(k) = k(31-k)$ とおくと，$y = f(x)$ のグラフは $x = \dfrac{31}{2}$ を軸とする上に凸な放物線である．グラフの対称性より，$f(1) = f(30)$, $f(2) = f(29)$, $\cdots$, $f(15) = f(16)$ であり

$$② = f(1)(c_1 + c_{30}) + f(2)(c_2 + c_{29}) + \cdots + f(15)(c_{15} + c_{16})$$

である．$f(1) < f(2) < \cdots < f(15)$ であるから，② が最小となるのは

$$c_1 + c_{30} > c_2 + c_{29} > \cdots > c_{30} + c_{31}$$

すなわち，$c_1 + c_{30} = 30 + 29 = 59$, $c_2 + c_{29} = 28 + 27 = 55$, $\cdots$, $c_{15} + c_{16} = 2 + 1 = 3$ で

$$c_k + c_{31-k} = 63 - 4k \qquad (\text{初項 } 59,\ \text{公差 } -4 \text{ の等差数列})$$

のときである．求める最小値は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{15} k(31-k)(63-4k) \\
&= 4\sum_{k=1}^{15} k^3 - 187\sum_{k=1}^{15} k^2 + 31 \cdot 63 \sum_{k=1}^{15} k \\
&= 4 \times \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16\right)^2 - 187 \times \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 16 \cdot 31 + 31 \cdot 63 \times \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 \\
&= \mathbf{60080}
\end{aligned}$$

……(答)

また，②が最大となるのは

$$c_1 + c_{30} < c_2 + c_{29} < \cdots < c_{30} + c_{31}$$

すなわち，$c_1 + c_{30} = 1 + 2 = 3$, $c_2 + c_{29} = 3 + 4 = 7$, $\cdots$, $c_{15} + c_{16} = 29 + 30 = 59$ で

$$c_k + c_{31-k} = 4k - 1 \qquad (\text{初項 } 3,\ \text{公差 } 4 \text{ の等差数列})$$

のときである．求める最大値は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{15} k(31-k)(4k-1) \\
&= -4\sum_{k=1}^{15} k^3 + 125\sum_{k=1}^{15} k^2 - 31 \sum_{k=1}^{15} k \\
&= -4 \times \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16\right)^2 + 125 \times \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 16 \cdot 31 - 31 \times \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 \\
&= \mathbf{93680}
\end{aligned}$$

……(答)

である．