$k$ を 3 以上の整数とする．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = k+3, \quad a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の $\boxed{\phantom{0}}$ をうめよ．ただし，$\boxed{④}$ と $\boxed{⑤}$ は $k$ のみの式でうめよ．

$a_n$ を $n$ と $k$ で表すと $a_n = \boxed{①}$ である．さらに，次の条件によって定まる数列 $\{b_n\}$ を考える．

$$b_1 = k+1, \quad b_{n+1} = b_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$b_n$ を $n$ と $k$ で表すと $b_n = \boxed{②}$ である．

以下では $N$ を正の整数とする．このとき

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \frac{N(N+1)}{6} \times \left(\boxed{③}\right)$$

である．また

$$\frac{1}{b_n + k - 1} = \left(\boxed{④}\right)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n + \boxed{⑤}}\right)$$

であるので，$S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{b_n + k - 1}$ とおくと，$S_N$ を計算することができる．$k = 3$ とするとき $S_N$ を $N$ のみの式で表すと，$S_n = \dfrac{N}{\boxed{⑥}}$ である．

(21 関西大 文・経済・社会・政創 3)

---

【答】

| ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2n+k+1$ | $n^2+kn$ | $2N+3k+1$ | $\dfrac{1}{k-2}$ | $k-1$ | $2(N+2)$ |

---

【解答】

$$a_1 = k+3, \quad a_{n+1} = a_n + 2 \qquad (n \geqq 1)$$

$$b_1 = k+1, \quad b_{n+1} = b_{n+1} + a_n \quad (n \geqq 1)$$

数列 $\{a_n\}$ は，初項 $k+3$，公差 2 の等差数列であるから

$$\begin{aligned} a_n &= (k+3) + 2(n-1) \\ &= \boldsymbol{2n+k+1} \end{aligned}$$

……(答)

である．さらに，数列 $\{b_n\}$ は初項が $k+1$ で，その階差数列が $\{a_n\}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= (k+1) + \sum_{l=1}^{n-1}(2l+k+1) \\ &= k+1 + \frac{(n-1)\{(k+3)+(2n+k-1)\}}{2} \\ &= k+1 + (n-1)(n+k+1) \\ &= n^2 + kn \end{aligned}$$

である．これは $n=1$ のときも成立する．

$$b_n = \boldsymbol{n^2+kn} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

以下，$N$ を正の整数として

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} b_n &= \sum_{n=1}^{N}(n^2+kn)\\ &= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)+k\cdot\frac{1}{2}N(N+1)\\ &= \frac{N(N+1)}{6}\times(\boldsymbol{2N+3k+1}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n+k-1} &= \frac{1}{n^2+kn+k-1}\\ &= \frac{1}{(n+1)(n+k-1)}\\ &= \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k-2}}\right)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+\boldsymbol{k-1}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

であるので，$k=3$ とするとき

$$\begin{aligned}S_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}\\ &= \frac{N}{\boldsymbol{2(N+2)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．