1 から n までの自然数を 1 つずつ選び，順に a_1，a_2，$\cdots$，a_n とする．ただし，a_1，a_2，$\cdots$，a_n は互いに異なる数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が成立することを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k-(n-k+1)\}^2$ を n を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2$ が最大となるときの a_1，a_2，$\cdots$，a_n を求めよ．

(21 静岡大 理・情報・工 2 教・農 3)

【答】

(1) 略

(2) $\dfrac{1}{3}n(n+1)(n-1)$

(3) $a_1=n$，$a_2=n-1$，$\cdots$，$a_n=1$

【解答】

(1) 等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ …… $(*)$ が成立することを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = 1^2 = 1, \quad (\text{右辺}) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 1$$

であり，$n=1$ のとき等式 $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=m$ のときの成立を仮定する．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2\\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)^2 \quad (\because \text{ 帰納法の仮定})\\ &= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2+7m+6)\\ &= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)\\ &= \frac{1}{6}(m+1)\{(m+1)+1\}\{2(m+1)+1\}\end{aligned}$$

であり，$n=m+1$ のときも等式 $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して等式 $(*)$ は成り立つ． ……(証明終わり)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ を認めるならば，等式

$$k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3k(k+1)$$

を利用して，目標の等式を示すこともできる．すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\} = 3\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$n(n+1)(n+2) - 0\cdot 1\cdot 2 = 3\left\{\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

(2) $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ は $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を並べ換えたものであり

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)^2$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} (a_k - k)^2 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k - (n-k+1)\}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} ({a_k}^2 - 2ka_k + k^2) + \sum_{k=1}^{n} \{{a_k}^2 - 2(n-k+1)a_k + (n-k+1)^2\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \{2{a_k}^2 - 2(n+1)a_k + k^2 + (n-k+1)^2\} \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k \\
&= 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 2(n+1) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\
&= \frac{1}{3} n(n+1)\{2(2n+1) - 3(n+1)\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3} n(n+1)(n-1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) (2) より

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - k)^2 = \frac{1}{3} n(n+1)(n-1) - \sum_{k=1}^{n} \{a_k - (n-k+1)\}^2$$

であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - k)^2$ が最大となる条件は

「$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{a_k - (n-k+1)\}^2$ が最小になる」

ことである．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{a_k - (n-k+1)\}^2 \geqq 0$ であり，等号は

$a_k = n-k+1\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき

成り立つ．よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - k)^2$ が最大になるのは

$$\boldsymbol{a_1 = n,\ a_2 = n-1,\ \cdots,\ a_n = 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のときである．