x の関数 $f(x)=x^2+ax+b$ がある．方程式 $f(x)=0$ の 2 つの実数解の差が 1 であり，x の値が 2 から 5 まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率が $\dfrac{13}{2}$ であるとき，a の値は $\boxed{\text{イ}}$, b の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(21 慶應大 薬 1(2))

【答】

イ	ウ
$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{3}{16}$

【解答】

$$f(x)=x^2+ax+b$$

$f(x)=0$ の実数解の差が 1 であるから

$$\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}=1$$
$$\sqrt{a^2-4b}=1$$
$$\therefore\quad a^2-4b=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

また，x の値が 2 から 5 まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率が $\dfrac{13}{2}$ であるから

$$\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{13}{2}$$
$$\frac{(25+5a+b)-(4+2a+b)}{3}=\frac{13}{2}$$
$$7+a=\frac{13}{2}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

これを ① に代入して

$$b=\frac{a^2-1}{4}=\boldsymbol{-\frac{3}{16}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ① については次のようにしてもよい．
  $f(x)=0$ の 2 解を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると

$$\beta-\alpha=1 \iff (\beta-\alpha)^2=1$$
$$\therefore\quad (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$$
$$\therefore\quad a^2-4b=1 \quad (\because\ 解と係数の関係)$$