$a > 0$ とし，$f(x) = x^3 - 3a^2x$ とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = -1$ に接するように定数 a の値を求めよ．また，このとき，$-1 < f(1) < 0$ であることを示せ．

(2) 4 点 $(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(-1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$ を頂点とする正方形の周を K とする．曲線 $y = f(x)$ と K との共有点の個数が，ちょうど 6 個となる定数 a の値の範囲を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値を m とする．a がすべての正の値をとって変化するとき，a の値を横軸に m の値を縦軸にとって m のグラフの概形をかけ．また，m の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(21 旭川医大 医 1)

【答】

(1) $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，不等式の証明は略

(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} < a < \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

(3) $a = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{4}$

【解答】

$$f(x) = x^3 - 3a^2x \quad (a > 0)$$

(1)
$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2$$
$$= 3(x+a)(x-a)$$

であり，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = -1$ と接するのは，極小値 $f(a)$ が -1 となるときであり，a の値は

$$-2a^3 = -1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．このとき

$$f(1) = 1 - 3a^2 = 1 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2 - 3\sqrt[3]{2}}{2} < 0$$

$$f(1) + 1 = 2 - 3a^2 = 2 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4 - 3\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{54}}{2} > 0$$

であるから，$-1 < f(1) < 0$ は成り立つ．　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

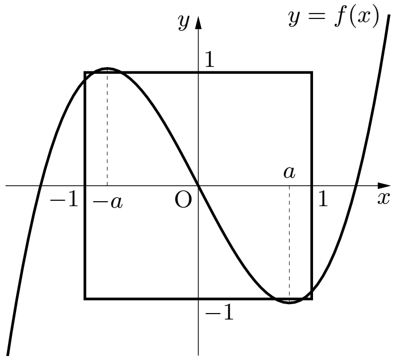
(2) 曲線 $y = f(x)$，正方形の周 K はどちらも原点 O に関して対称なので，$y = f(x)$ と K が 6 点を共有することは

「$x > 0$ の範囲で $y = f(x)$ と K が 3 点を共有する」

ことと同値である．$f(x)$ は $x = a$ で極小となることに着目すると，この条件は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(a) < -1 \\ f(1) > -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < a < 1 \\ -2a^3 < -1 \\ 1 - 3a^2 > -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a > \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ a < \sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$$



である．ここで

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^6 - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8 \cdot 4 - 27}{3^3 \cdot 2^2} > 0$$

より，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} < \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ が確認されるから，a の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a < \sqrt{\frac{2}{3}}}$$ ……(答)

である．

(3) 極値となる $x = \pm a$ が定義域 $-1 \leqq x \leqq 1$ の中にあるか否かで場合分けする．

(i) $0 < a \leqq 1$ のとき

増減は右表となり，最大値 m は

$$m = \max\{f(-a),\ f(1)\}$$

である．

x	-1	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	↗	$2a^3$	↘	$-2a^3$	↗	$f(1)$

$$\begin{aligned} f(-a) - f(1) &= 2a^3 - (1 - 3a^2) \\ &= 2a^3 + 3a^2 - 1 \\ &= (2a-1)(a+1)^2 \end{aligned}$$

であるから

$$m = \begin{cases} f(1) = 1 - 3a^2 & \left(0 \leqq \dfrac{1}{2} \text{のとき}\right) \\ f(-a) = 2a^3 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

である．

(ii) $a \geqq 1$ のとき

$-1 \leqq x \leqq 1$ で $f(x)$ は減少するので

$$m = f(-1) = 3a^2 - 1$$

である．

(i)，(ii) より

$$m = \begin{cases} 1 - 3a^2 & \left(0 \leqq \dfrac{1}{2} \text{のとき}\right) \\ 2a^3 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}\right) \\ 3a^2 - 1 & (a \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり，m のグラフは右図の実線部分となる．

また，グラフより m は

$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ ……(答)

をとる．