a は実数とする．放物線 $y = x^2 + a$ と円 $x^2 + y^2 = 4$ が共有点をもつための必要十分条件を，a のとりうる値の範囲で定めなさい．

(21 信州大 教育 1)

【答】 $-\dfrac{17}{4} \leqq a \leqq 2$

【解答】

$$y = x^2 + a \qquad \cdots\cdots ①$$

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad \cdots\cdots ②$$

放物線 $y = x^2 + a$ と円 $x^2 + y^2 = 4$ が共有点をもつ条件は，①かつ②を満たす実数の組 $(x,\ y)$ が存在することである．

$$「① かつ ②」\iff \begin{cases} x^2 = y - a & \cdots\cdots ①' \\ (y-a) + y^2 = 4 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①′ より

$$y - a \geqq 0 \qquad \therefore \quad y \geqq a \qquad \cdots\cdots ④$$

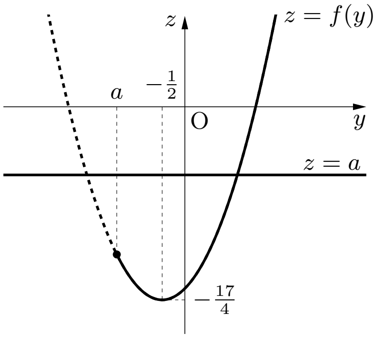
であり，③ は

$$y^2 + y - 4 = a$$

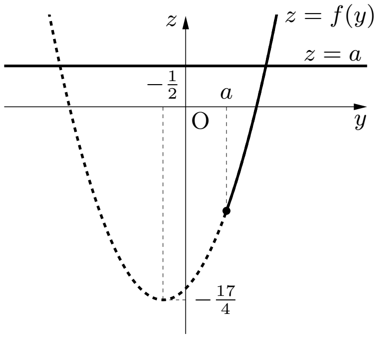
と変形される．$f(y) = y^2 + y - 4$ とおく．「④ かつ $f(y) = a$」を満たす実数 y が存在すると，①′ を満たす実数 x が存在するから，求める条件は，放物線 $z = f(y)$ と直線 $z = a$ が ④ の範囲で共有点をもつことである．

$$f(y) = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

軸 $y = -\dfrac{1}{2}$ が ④ の範囲にあるか否かで場合分けする．



(i)



(ii)

(i) $a \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき

求める条件は $-\dfrac{17}{4} \leqq a$ である．(i) の範囲もあわせると　$-\dfrac{17}{4} \leqq a \leqq -\dfrac{1}{2}$

(ii) $-\dfrac{1}{2} < a$ のとき

求める条件は $f(a) \leqq a$ である．

$$a^2 + a - 4 \leqq a \qquad \therefore \quad -2 \leqq a \leqq 2$$

(ii) の範囲もあわせると　$-\dfrac{1}{2} < a \leqq 2$　である．

以上，(i)，(ii) より，a のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{17}{4} \leqq a \leqq 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- y を消去してもよい．

$$「①\ かつ\ ②」\iff \begin{cases} y = x^2 + a & \cdots\cdots ① \\ x^2 + (x^2+a)^2 = 4 & \cdots\cdots ㋐ \end{cases}$$

㋐ は

$$x^4 + (2a+1)x^2 + a^2 - 4 = 0$$

と変形される．$g(x) = x^4 + (2a+1)x^2 + a^2 - 4$ とおく．$g(x) = 0$ を満たす実数 x が存在すると，① を満たす実数 y が存在するから，求める条件は，4 次方程式 $g(x) = 0$ が実数解をもつことである．

$$g'(x) = 4x^3 + 2(2a+1)x = 2x(2x^2 + 2a + 1)$$

$2x^2 + 2a + 1$ の符号が変化するか否かで場合分けする．

(i) $2a + 1 < 0$ $\left(a < -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$g(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{-2a-1}{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{-2a-1}{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$g(x)$ は偶関数であるから，$g\left(-\sqrt{\dfrac{-2a-1}{2}}\right) = g\left(\sqrt{\dfrac{-2a-1}{2}}\right)$ であり，求める条件は

$$g\left(\sqrt{\frac{-2a-1}{2}}\right) \leqq 0$$

である．

$$\begin{aligned} g\left(\sqrt{\frac{-2a-1}{2}}\right) &= \frac{(-2a-1)^2}{4} + (2a+1)\frac{-2a-1}{2} + a^2 - 4 \\ &= -\frac{(2a+1)^2}{4} + a^2 - 4 \\ &= -a - \frac{17}{4} \end{aligned}$$

であるから，求める条件は

$$-a - \frac{17}{4} \leqq 0 \qquad \therefore \quad -\frac{17}{4} \leqq a$$

(i) の範囲もあわせると　$-\dfrac{17}{4} \leqq a < -\dfrac{1}{2}$　である．

(ii) $1 + 2a \geqq 0$ $\left(a \geqq -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$g(x)$ の増減は右表となるから，求める条件は

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$g(0) \leqq 0 \iff a^2 - 4 \leqq 0$$
$$\therefore \quad -2 \leqq a \leqq 2$$

(ii) の範囲もあわせると　$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 2$　である．

以上，(i)，(ii) より，a のとりうる値の範囲は

$$-\frac{17}{4} \leqq a \leqq 2$$

である．