3 次方程式 $x^3+ax^2+b=0$ ⋯⋯ ① について，以下の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) ① が複素数 $1+\sqrt{2}i$ を解にもつとき，a, b の値を求めよ．
(2) ① が 1 を解にもち，かつ ① が 2 重解をもつとき，a, b の値の組をすべて求めよ．
(3) ① が異なる 3 つの実数解をもつための条件を a, b を用いて表し，この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

(21 大阪府大 現シス・生環 4)

【答】

(1) $a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{9}{2}$

(2) $(a,\ b)=(-1,\ 0),\ (3,\ -4),\ \left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

(3) $b\left(b+\dfrac{4}{27}a^3\right)<0$，図は略

【解答】

$$x^3+ax^2+b=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $x=1+\sqrt{2}i$ は①の解であるから

$$(1+\sqrt{2}i)^3+a(1+\sqrt{2}i)^2+b=0$$
$$(1+3\sqrt{2}i-6-2\sqrt{2}i)+a(1+2\sqrt{2}i-2)+b=0$$
$$(-5+\sqrt{2}i)+a(-1+2\sqrt{2}i)+b=0$$
$$\therefore\quad (-5-a+b)+(1+2a)\sqrt{2}i=0$$

a, b は実数だから，$-5-a+b$, $(1+2a)\sqrt{2}$ も実数であり

$$\begin{cases}-5-a+b=0\\(1+2a)\sqrt{2}=0\end{cases}$$

が成り立つ．これを解くと

$$\boldsymbol{a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{9}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $\alpha=1+\sqrt{2}i$ とおくと

$$(\alpha-1)^2=(\sqrt{2}i)^2 \qquad \therefore\quad \alpha^2-2\alpha+3=0$$

x^3+ax^2+b を x^2-2x+3 で割ると

$$x^3+ax^2+b=(x^2-2x+3)(x+a+2)+(2a+1)x+b-3a-6$$

となり，これに α を代入すると

$$\begin{aligned}\alpha^3+a\alpha^2+b&=0+(2a+1)(1+\sqrt{2}i)+b-3a-6\\&=(-a+b-5)+(2a+1)\sqrt{2}i\end{aligned}$$

である．これより

$$(-a+b-5)+(2a+1)\sqrt{2}i=0$$

を得る．以下,【解答】と同じ．

- 解と係数の関係を用いることもできる．

  ① は実数を係数するとする 3 次方程式であるから，$\alpha=1+\sqrt{2}i$ が解のとき，$\overline{\alpha}=1-\sqrt{2}i$ も解である．残りの解を β とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}+\beta=-a\\ \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\beta\alpha=0\\ \alpha\overline{\alpha}\beta=-b\end{cases}$$

  $\alpha+\overline{\alpha}=2,\ \alpha\overline{\alpha}=1+2=3$ より

$$\begin{cases}2+\beta=-a\\ 3+2\beta=0\\ 3\beta=-b\end{cases}$$

$$\therefore\quad \beta=-\frac{3}{2},\ a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{9}{2}$$

  である．

(2) ①が 1 を解にもつから

$$1^3+a\cdot 1^2+b=0 \qquad \therefore\quad a=-b-1 \qquad \cdots\cdots ②$$

である．よって，①は

$$x^3-(b+1)x^2+b=0$$

$$\therefore\quad (x-1)(x^2-bx-b)=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

③が 2 重解をもつ条件は，$x^2-bx-b=0$ $\cdots\cdots$ ④ が

(i) 1 でない重解をもつ

(ii) 1 と 1 でない解をもつ

のいずれかである．④ の判別式を D とおくと

$$D=b^2+4b=b(b+4)$$

である．

(i) のとき

$$\begin{cases}D=0\\ 1^2-b\cdot 1-b\fallingdotseq 0\end{cases} \qquad \therefore\quad \begin{cases}b(b+4)=0\\ b\fallingdotseq \dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad \therefore\quad b=0,\ -4$$

②より

$$(a,\ b)=(-1,\ 0),\ (3,\ -4)$$

(ii) のとき

$$\begin{cases}D>0\\ 1^2-b\cdot 1-b=0\end{cases} \qquad \therefore\quad \begin{cases}b<-4 \text{ または } 0<b\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad \therefore\quad b=\frac{1}{2}$$

②より

$$(a,\ b)=\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

である．

よって，求める組 $(a,\ b)$ は

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(-1,\ 0),\ (3,\ -4),\ \left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．

(3) $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ とおく．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax \\ &= 3x\left(x + \frac{2}{3}a\right) \end{aligned}$$

①が異なる 3 実数解をもつ条件は，$y = f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わること，すなわち，関数 $f(x)$ は極大値，極小値をもち，その符号が異なることである．

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{3}a \neq 0 \\ f(0)f\left(-\dfrac{2}{3}a\right) < 0 \end{cases} \iff f(0)f\left(-\frac{2}{3}a\right) < 0$$

$$\therefore \quad b \cdot \left\{\left(-\frac{2}{3}a\right)^3 + a\left(-\frac{2}{3}a\right)^2 + b\right\} < 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{b\left(b + \frac{4}{27}a^3\right) < 0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

これを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると右図の斜線部となる．境界は含まない．