O を原点とする座標平面において，放物線 $C : y = x^2 - 1$ に接する直線を l とし，その接点を P とするとき，以下の問いに答えなさい．解答欄 (省略) には途中の計算過程も書きなさい．

(1) 原点 O と点 P を結ぶ直線 OP と l が直交するとき，直線 l の方程式と，対応する点 P の座標をすべて求めなさい．

(2) (1) で求めた l のうち，傾きが正でかつ最大であるものを l_1，傾きが負でかつその絶対値が最大のものを l_2 とするとき，C と l_1 および l_2 のすべてによって囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

(21 公立千歳科技大 理工 3)

【答】

(1) $l : y = -1,\ \mathrm{P}(0,\ -1)$;

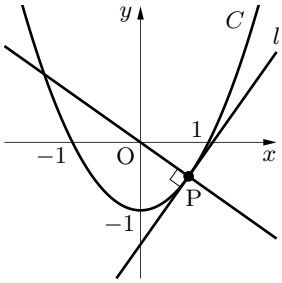
$l : y = \sqrt{2}x - \dfrac{3}{2},\ \mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{2}\right)$;

$l : y = -\sqrt{2}x - \dfrac{3}{2},\ \mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $S = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

【解答】

$$C : y = x^2 - 1$$



(1) $y' = 2x$ より，C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2 - 1)$ における接線の方程式は，

$$y = 2p(x - p) + p^2 - 1$$

$$\therefore\quad y = 2px - p^2 - 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

$p = 0$ のとき，$\mathrm{P}(0,\ -1)$ であり，直線 OP は y 軸である．点 P における C の接線は $y = -1$ であるから，$\mathrm{OP} \perp l$ を満たす．

$p \neq 0$ のとき，直線 OP の傾きは $\dfrac{p^2 - 1}{p}$ であり，$\mathrm{OP} \perp l$ となる条件は

$$\frac{p^2 - 1}{p} \cdot 2p = -1 \qquad \therefore\quad 2(p^2 - 1) = -1 \qquad \therefore\quad p = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

である．このとき，$\mathrm{P}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ であり，点 P における C の接線の方程式は $y = \pm\sqrt{2}x - \dfrac{3}{2}$ (複号同順) である．

よって，求める接線 l の方程式とその接点 P の座標は

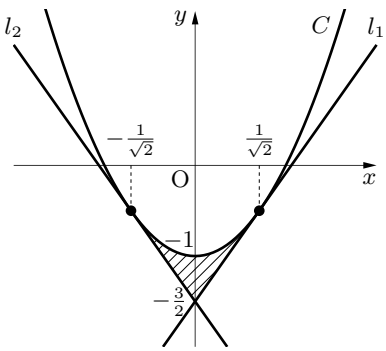
$$\boldsymbol{l : y = -1,\qquad \mathrm{P}(0,\ -1)}$$

$$\boldsymbol{l : y = \sqrt{2}x - \frac{3}{2},\qquad \mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{l : y = -\sqrt{2}x - \frac{3}{2},\qquad \mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\right)}$$

である．

(2) $l_1 : y = \sqrt{2}x - \dfrac{3}{2}$, $1_2 : y = -\sqrt{2}x - \dfrac{3}{2}$ と C のすべてによって囲まれた部分は右図の斜線部分であり，y 軸に関して対称である．



求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{x^2 - 1 - \left(\sqrt{2}x - \frac{3}{2}\right)\right\} dx \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 dx \\
&= 2\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{6}}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．