3 次関数のグラフと面積

a, b, c を実数の定数とし，$c \fallingdotseq -\dfrac{1}{3}$ とする．関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx, \quad g(x) = (x+1)^3$$

と定め，$f(x)$ は $x = c$, $x = -\dfrac{1}{3}$ でそれぞれ極値をとるとする．

(1) a, c をそれぞれ b を用いて表せ．

(2) $f(c) = g(c)$ とする．このとき，b の値を求めよ．

(3) (2) の条件のもとで，2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(21 室蘭工大 1)

【答】

(1) $a = \dfrac{3}{2}b + 1$，$c = -\dfrac{b}{2}$

(2) $b = 2$

(3) $S = \dfrac{4}{3}$

【解答】

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$$

$$g(x) = (x+1)^3$$

(1) $$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

$f(x)$ は 2 つの値 $x = c$, $-\dfrac{1}{3}$ で極値をとり，$c \fallingdotseq -\dfrac{1}{3}$ であるから，この異なる 2 つの値 $x = c$, $-\dfrac{1}{3}$ は $f'(x) = 0$ の解である．解と係数の関係より

$$\begin{cases} c + \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{2a}{6} \\ c \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{b}{6} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} 3c - 1 = -a \\ -2c = b \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{c = -\dfrac{b}{2}}, \quad \boldsymbol{a = \dfrac{3}{2}b + 1} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

- $c \fallingdotseq -\dfrac{1}{3}$ のもとで，連立方程式 $\begin{cases} f'(c) = 0 \\ f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0 \end{cases}$ を解いてもよい．

(2) $f(c) = g(c)$ のとき

$$2c^3 + ac^2 + bc = (c+1)^3$$

(1) より

$$2\left(-\frac{b}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}b + 1\right)\left(-\frac{b}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{b}{2} + 1\right)^3$$

式を整理すると

$$2b^3-(3b+2)b^2+4b^2=(b-2)^3$$
$$-b^3+2b^2=b^3-6b^2+12b-8$$
$$b^3-4b^2+6b-4=0$$
$$(b-2)(b^2-2b+2)=0$$

$b^2-2b+2=(b-1)^2+1>0$ ($\because$ b は実数) であるから

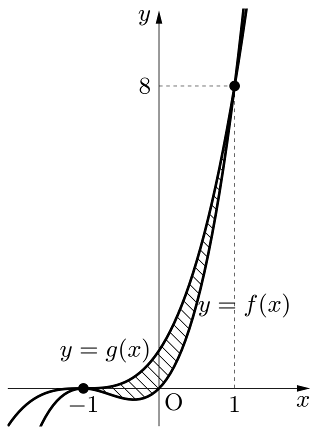
$$\boldsymbol{b=2}$$ ……(答)

(3) (2) のとき，$a=4,\ b=2,\ c=-1$ ($\because$ (1), (2)) なので

$$f(x)=2x^3+4x^2+2x$$
$$g(x)=(x+1)^3$$

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点の x 座標は

$$f(x)=g(x)$$
$$2x^3+4x^2+2x=(x+1)^3$$
$$x^3+x^2-x-1=0$$
$$(x+1)^2(x-1)=0$$
$$\therefore\quad x=-1\ (\text{重解}),\ 1$$



2 曲線で囲まれた部分は右図の斜線部分であり，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{1}\{g(x)-f(x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x^3-x^2+x+1)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1\quad(\because\ \text{偶関数・奇関数})$$
$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$ ……(答)

- S は次のように計算してもよい．

$$S=\int_{-1}^{1}\{g(x)-f(x)\}\,dx=-\int_{-1}^{1}(x+1)^2(x-1)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)^2(x+1-2)\,dx=-\left[\frac{(x+1)^4}{4}-2\cdot\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$
$$=-\left(4-2\cdot\frac{8}{3}\right)$$
$$=\frac{4}{3}$$

- $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$ という公式もある．これは

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m\,!\,n\,!}{(m+n+1)\,!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\quad(m,\ n\ \text{は 0 以上の整数})$$

と一般化される．