関数 $f(x)=-x^2+2x$，$g(x)=|f(x)|$，$h(x)=f(x)+2$ を用いて，3 つの曲線

$$C_f: y=f(x),\quad C_g: y=g(x),\quad C_h: y=h(x)$$

を定義する．直線 $L: y=\alpha x+\beta$ は点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{3}{2},\ -3\right)$ から曲線 C_f に引いた接線であり，直線 L と曲線 C_h との共有点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とする．また，連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq \alpha x+\beta \\ y \geqq g(x) \\ y \leqq h(x) \\ x \leqq 2 \end{cases}$$

の表す領域の面積を S とする．ただし，$\alpha>\beta,\ p>0,\ q>0$ とする．次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい．
(2) α，β の値をそれぞれ求めなさい．
(3) p，q の値をそれぞれ求めなさい．
(4) S の値を求めなさい．

(21 帯広畜産大 3)

【答】
(1) $f'(x)=-2x+2$
(2) $\alpha=2,\ \beta=0$
(3) $p=\sqrt{2},\ q=2\sqrt{2}$
(4) $S=4-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

【解答】

$$C_f: y=f(x)=-x^2+2x$$
$$C_g: y=g(x)=|f(x)|$$
$$C_h: y=h(x)=f(x)+2$$

(1) $f(x)$ の導関数は

$$\boldsymbol{f'(x)=-2x+2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 曲線 C_f 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+2)(x-t)-t^2+2t$$
$$\therefore\quad y=(-2t+2)x+t^2$$

である．これが点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{3}{2},\ -3\right)$ を通る条件は

$$-3=(-2t+2)\left(-\frac{3}{2}\right)+t^2$$
$$t^2+3t=0 \qquad \therefore\quad t=0,\ -3$$

$t=0$ のとき，接線の方程式は　$y=2x$，
$t=-3$ のとき，接線の方程式は　$y=8x+9$

である．求める接線 $L: y=\alpha x+\beta$ は $\alpha>\beta$ を満たすから，$y=2x$ であり

$$\boldsymbol{\alpha=2,\quad \beta=0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 直線 L と曲線 C_h との共有点 P の座標 $(p,\ q)$ は

$$\begin{cases} q = 2p \\ q = -p^2 + 2p + 2 \end{cases}$$

を満たすから

$$2p = -p^2 + 2p + 2$$
$$p^2 = 2 \qquad \therefore \quad p = \pm\sqrt{2}$$

である．$p > 0$ より

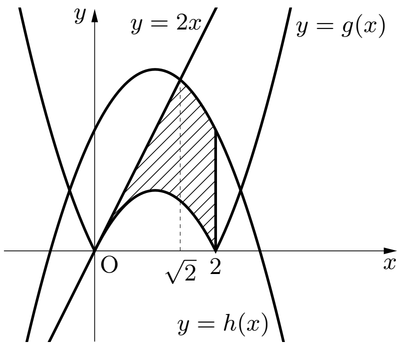
$$p = \sqrt{2}, \quad q = 2\sqrt{2}$$

これは $q > 0$ を満たす．よって

$$\boldsymbol{p = \sqrt{2}, \quad q = 2\sqrt{2}}$$ ……(答)

である．

(4) 与えられた連立不等式を満たす領域は右図の斜線部分である．求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{2}} \{2x - (-x^2 + 2x)\}\,dx \\ &\quad + \int_{\sqrt{2}}^2 \{(-x^2 + 2x + 2) - (-x^2 + 2x)\}\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} x^2\,dx + \int_{\sqrt{2}}^2 2\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} + \Big[2x\Big]_{\sqrt{2}}^2 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2(2 - \sqrt{2}) \\ &= \boldsymbol{4 - \frac{4\sqrt{2}}{3}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．