2 つの関数 $f(x)=-x^2+1$，$g(x)=-x^2+6x-5$ について，以下の問に答えよ．

(1) 2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ について，交点の座標およびそれぞれの放物線の頂点の座標を求めよ．

(2) 放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共通接線 l の方程式を求めよ．また，直線 l と 2 つの放物線で囲まれる部分の面積を求めよ．

(21 西南学院大 全学 3)

【答】

(1) 交点の座標は $(1,\ 0)$，$y=f(x)$ の頂点の座標は $(0,\ 1)$，$y=g(x)$ の頂点の座標は $(3,\ 4)$

(2) $y=-2ax+a^2+1$

(3) $y=x+\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{9}{4}$

【解答】

$$f(x)=-x^2+1$$

$$g(x)=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$$

(1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は

$$-x^2+1=-x^2+6x-5$$

$$6x=6 \qquad \therefore \quad x=1$$

よって，交点の座標は　$\mathbf{(1,\ 0)}$　である．　……(答)

また，$y=f(x)$ の頂点の座標は　$\mathbf{(0,\ 1)}$　であり，　……(答)

$y=g(x)$ の頂点の座標は　$\mathbf{(3,\ 4)}$　である．　……(答)

(2) $f'(x)=-2x$ より，$y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=-2a(x-a)-a^2+1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=-2ax+a^2+1}$$ ……(答)

である．

(3) (2) で求めた $y=f(x)$ の接線が $y=g(x)$ にも接するとき

$$-x^2+6x-5=-2ax+a^2+1$$

すなわち

$$x^2-2(a+3)x+a^2+6=0$$

は重解をもつ．判別式を D とおくと $D=0$ である．

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2-(a^2+6)=6a+3$$

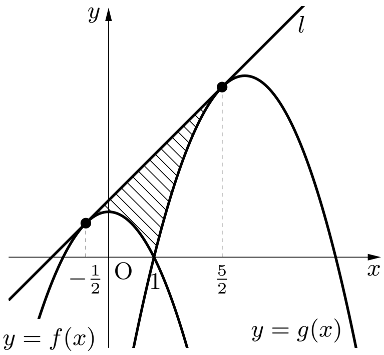
であり，

$$a=-\frac{1}{2}$$

である．したがって，共通接線 l の方程式は

$$\boldsymbol{y=x+\frac{5}{4}}$$ ……(答)

である．



このとき，$y=f(x)$ と l の接点の x 座標は

$$x=a=-\frac{1}{2}$$

であり，$y=g(x)$ と l の接点の x 座標は

$$x=a+3=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$$

である．

共通接線 l と 2 つの放物線で囲まれる図形は右図の斜線部分であり，この面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left\{\left(x+\frac{5}{4}\right)-(-x^2+1)\right\}dx\\&\quad+\int_{1}^{\frac{5}{2}}\left\{\left(x+\frac{5}{4}\right)-(-x^2+6x-5)\right\}dx\\&=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{1}^{\frac{5}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)^3\right]_{1}^{\frac{5}{2}}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^3\\&=\boldsymbol{\frac{9}{4}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

- $g'(x)=-2x+6$ より $(b,\ g(b))$ における接線の方程式は

$$y=(-2b+6)(x-b)-b^2+6b-5$$
$$\therefore\quad y=(-2b+6)x+b^2-5$$

これが (2) で求めた接線と一致する条件は

$$\begin{cases}-2a=-2b+6\\a^2+1=b^2-5\end{cases}\iff\begin{cases}b=a+3\\a^2+6=(a+3)^2\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}b=a+3\\6a+3=0\end{cases}\qquad\therefore\quad a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2}$$

これにより，共通接線の方程式は $y=x+\dfrac{5}{4}$ であり，接点の x 座標は $-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}$ である．