無限級数，はさみうちの原理

以下の問いに答えよ．必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ を用いてよい．

(1) 2 以上の整数 n に対して不等式 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\log n$ を示せ．

(2) 正の整数 n に対し

$$a_n=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

により数列 $\{a_n\}$ を定める．このとき，等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{2}$$

を示せ．

(3) さらに正の整数 n に対し

$$b_n=\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n}{n^2}$$

により数列 $\{b_n\}$ を定めるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ．

(21 東北大 後 理 5)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $\dfrac{1}{4}$

【解答】

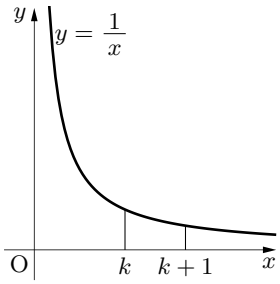
(1) $y=\dfrac{1}{x}$ は減少関数であるから，$k\leqq x\leqq k+1$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき

$$\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{x}$$

であり，等号は恒等的に成り立つわけではないから

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\,dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore\quad \frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx \qquad \cdots\cdots ①$$



不等式 ① に $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ を代入し，辺々加えると

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{1}{x}dx=\log n$$

……(証明終わり)

が成り立つ．

(2) 正の整数 n に対し

$$a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \qquad \cdots\cdots ②$$

であるから

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ここで，(1) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < 1+\log n$ であるから

$$0 < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \frac{1+\log n}{n} \to 0 \ (n\to\infty) \quad \left(\because \ \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0\right)$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 0$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) さらに正の整数 n に対し

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k \\
&= \frac{n+1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2} \quad (\because \ ②) \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k - \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n\{2+(n+1)\}}{2} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k - \frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{n}\right) \\
&\longrightarrow 1\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot 1 \quad (n\longrightarrow\infty) \quad (\because \ (2))
\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．