漸化式とハサミウチの原理

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2e^{-a_n} - 1 + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．次の問いに答えよ．ただし，$2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてよい．

(1) $f(x) = e^{-x} - 1 + x$ とする．$0 < x < 1$ のとき，不等式

$$0 < f(x) < \frac{2}{3}x$$

が成り立つことを示せ．

(2) $b_n = a_n - \log 2$ とする．すべての正の整数 n について $0 < b_n < 1$ となることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(21 琉球大 工・医・理・教育 2)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) $\log 2$

【解答】

(1) $f(x) = e^{-x} - 1 + x$ とすると

$$f'(x) = -e^{-x} + 1$$

であり，$0 < x < 1$ のとき，$e^{-1} < e^{-x} < e^0 = 1$ より

$$f'(x) > 0$$

である．$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で単調増加であり，さらに，$f(0) = e^0 - 1 + 0 = 0$ なので

$$0 < x < 1 \text{ のとき，} f(x) > 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

また，$g(x) = \dfrac{2}{3}x - f(x)$ とすると

$$g'(x) = \frac{2}{3} - f'(x) = e^{-x} - \frac{1}{3}$$

であり，$0 < x < 1$ のとき，$2 < e < 3$ であることより

$$g'(x) = e^{-x} - \frac{1}{3} > e^{-1} - \frac{1}{3} > 3^{-1} - \frac{1}{3} = 0$$

である．$g(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で単調増加であり，さらに，$g(0) = 0 - f(0) = 0$ なので

$$0 < x < 1 \text{ のとき，} g(x) > 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

以上 ①，② より，$0 < x < 1$ のとき，$0 < f(x) < \dfrac{2}{3}x$ が成り立つ．　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) $b_n = a_n - \log 2$ としたとき，すべての正の整数 n について「$0 < b_n < 1 \cdots\cdots (*)$」 となることを，数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$b_1 = a_1 - \log 2 = 1 - \log 2 = \log \frac{e}{2} > 0 \quad (\because\ e > 2)$$

$$1 - b_1 = 1 - (1 - \log 2) = \log 2 > 0$$

したがって，$n = 1$ のとき，$(*)$ は成立する．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．すなわち，$0 < b_k < 1$ であることを仮定すると，(1) の結果より，$0 < f(b_k) < \dfrac{2}{3}b_k$ が成り立つ．

ここで，$f(b_k)$ は

$$\begin{aligned} f(b_k) &= e^{-b_k} - 1 + b_k \\ &= e^{-a_k + \log 2} - 1 + (a_k - \log 2) \\ &= 2e^{-a_k} - 1 + a_k - \log 2 \\ &= a_{k+1} - \log 2 \\ &= b_{k+1} \end{aligned}$$

である．よって

$$0 < b_{k+1} < \frac{2}{3}b_k < \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} < 1$$

となり，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する．

以上 (i)，(ii) より，すべての正の整数 n について $(*)$ は成り立つ．　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(3) (2) より $0 < b_n < 1$ なので

$$0 < f(b_n) < \frac{2}{3}b_n \quad (\because\ (1))$$

が成り立つ．(2)(ii) で $b_{n+1} = f(b_k)$ であることを示したから

$$0 < b_{n+1} < \frac{2}{3}b_n$$

が成り立つ．この不等式を繰り返し用いると

$$0 < b_n < \frac{2}{3}b_{n-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^2 b_{n-2} < \cdots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} b_1 \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

が成り立つ．はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であり

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n + \log 2) = \mathbf{\log 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．