極限 $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)}$ の値を求めなさい．

(21 福島大 理工 1(2))

【答】 $\cos a$

【解答】

微分係数の定義につないでいく．

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}}{\dfrac{\sin(x-a)}{x-a}}$$

$f(x) = \sin x$ とおくと，$f'(x) = \cos x$ であり，$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} = 1$ であるから

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)} = \frac{f'(a)}{1} = \boldsymbol{\cos a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $x - a = \theta$ とおき，式を整理すると

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)} &= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta + a) - \sin a}{\sin \theta} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{(\sin \theta \cos a + \cos \theta \sin a) - \sin a}{\sin \theta} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \left\{ \cos a + \frac{(\cos \theta - 1) \sin a}{\sin \theta} \right\} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \left\{ \cos a - \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \sin a}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} \right\} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \left(\cos a - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \cdot \sin a \right) \\
&= \cos a - \frac{0}{1+1} \cdot \sin a \\
&= \cos a
\end{aligned}$$

である．