円錐に半径 1 の球が内接している．(つまり，球が直円錐の側面と接し，底面とは底面の円の中心で接する．) 直円錐の母線と底面のなす角を 2θ $\left(0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とし円錐の側面積を S とする．

(1) S を θ で表せ．

(2) $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = u$ とする．S を u の関数としてグラフの概形を描き，また S の最小値を求めよ．

(21 大阪医大 医 4)

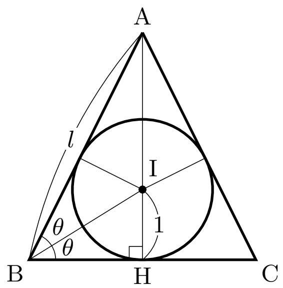
【答】

(1) $S = \dfrac{\pi}{\tan^2\theta\cos 2\theta}$

(2) 図は略，最小値 $(3 + 2\sqrt{2})\pi$

【解答】

(1) 直円錐の頂点 A と球の中心 I を通る平面による切り口を考える．切り口の二等辺三角形を △ABC とおくと，BC は底円の直径であり，辺 BC の中点 H は底円の中心である．A，I，H はこの順に一直線上に並び，IH = 1 である．



母線の長さ l は，

$$l = \mathrm{AB} = \frac{\mathrm{BH}}{\cos 2\theta}$$

であり，$\mathrm{BH} = \dfrac{\mathrm{IH}}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$ であるから

$$l = \frac{1}{\tan\theta\cos 2\theta}$$

である．また，直円錐の側面の展開図における弧の長さ L は，底面の円周の長さに一致するから

$$L = 2\pi\mathrm{BH} = \frac{2\pi}{\tan\theta}$$

である．よって，円すいの側面積 S は

$$S = \frac{1}{2}lL = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\theta\cos 2\theta}\cdot\frac{2\pi}{\tan\theta} = \boldsymbol{\frac{\pi}{\tan^2\theta\cos 2\theta}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = u$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと

$$\frac{1}{\tan^2\theta} = u$$

であり，$0 < \tan\theta < 1$ であるので，$u > 1$ である．また

$$\frac{1 + \cos 2\theta}{1 - \cos 2\theta} = u \iff 1 + \cos 2\theta = u(1 - \cos 2\theta) \quad (\because\ 1 - \cos 2\theta \fallingdotseq 0)$$

$$\therefore\quad (1 + u)\cos 2\theta = u - 1 \qquad \therefore\quad \cos 2\theta = \frac{u-1}{u+1}$$

であるから，(1) の式より

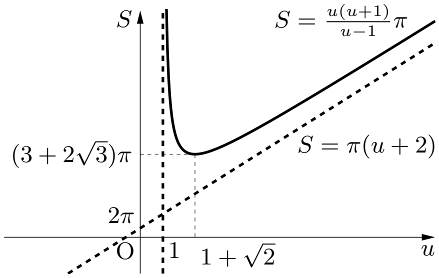
$$S = \frac{\pi}{\tan^2\theta\cos 2\theta} = \frac{\pi u}{\dfrac{u-1}{u+1}} = \frac{u(u+1)}{u-1}\pi$$

となる．

$$\begin{aligned}\frac{dS}{du} &= \frac{(2u+1)(u-1)-u(u+1)\cdot 1}{(u-1)^2}\pi \\ &= \frac{u^2-2u-1}{(u-1)^2}\pi \\ &= \frac{\{u-(1+\sqrt{2})\}\{u-(1-\sqrt{2})\}}{(u-1)^2}\pi\end{aligned}$$

より S の増減は下表となる．

u	(1)	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$\dfrac{dS}{du}$		$-$	0	$+$
S		$\searrow$		$\nearrow$



$S = \left(u+2+\dfrac{2}{u-1}\right)\pi$ より，2 直線

$$S = \pi(u+2), \quad u = 1$$

は漸近線であり，S は $u = 1+\sqrt{2}$ において

$$\text{極小値}\,\frac{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\pi = (3+2\sqrt{3})\pi$$

をとるから，グラフの概形は右図のようになる．

よって，S の最小値は

$$\boldsymbol{(3+2\sqrt{2})\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．