微分法の方程式への応用

$x>0$ において，関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を

$$f(x)=e^x-x^e,\quad g(x)=e^{x-1},\quad h(x)=x^{e-1}$$

で定める．すべての自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ であること，および $2<e<3$ であることを用いてよい．

(1) $1<x<e$ のとき，$\log g(x)<\log h(x)$ であることを示せ．
(2) $f(x)$ の増減を調べて極値を求めよ．
(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ．
(4) k を定数とする．方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(21 名古屋工大 後 1)

【答】

(1) 略
(2) 極大値 $e-1$ $(x=1)$，極小値 0 $(x=e)$
(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$
(4)

k	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
個数	0	1	2	2	3	2	1

【解答】

(1) $F(x)=\log h(x)-\log g(x)$ $(1<x<e)$ とおく．

$$\begin{aligned}F(x)&=\log x^{e-1}-\log e^{x-1}\\&=(e-1)\log x-(x-1)\end{aligned}$$

であり

$$F'(x)=\frac{e-1}{x}-1=\frac{e-1-x}{x}$$

より，増減は右のようになる．

x	(1)	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$	(e)
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

$1<x<e$ のとき，$F(x)>0$，すなわち

$$\log g(x)<\log h(x)$$ ……(証明終わり)

である．

(2) $f(x)=e^x-x^e$ $(x>0)$ のとき

$$f'(x)=e^x-ex^{e-1}=e(e^{x-1}-x^{e-1})=e\{g(x)-h(x)\}$$

である．(1) も考慮すると

$$\begin{cases}0<x<1 \text{ のとき，} & F(x)<0 \text{ であり } \log g(x)>\log h(x) & \therefore\ g(x)>h(x)\\ 1<x<e \text{ のとき，} & F(x)>0 \text{ であり } \log g(x)<\log h(x) & \therefore\ g(x)<h(x)\\ e<x \text{ のとき，} & F(x)<0 \text{ であり } \log g(x)>\log h(x) & \therefore\ g(x)>h(x)\end{cases}$$

であるから，$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$f(x)$ は

$x=1$ で　**極大値 $\boldsymbol{e-1}$** ……(答)

$x=e$ で　**極小値 $\boldsymbol{0}$** ……(答)

をとる．

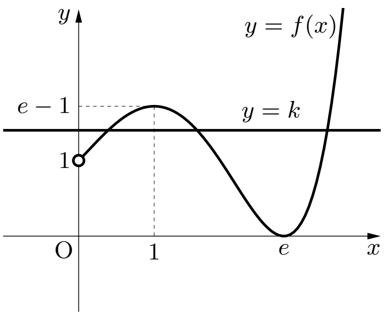
(3)
$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - x^e > e^x - x^3 \quad (\because\ 2<e<3) \\ &= e^x\left(1-\frac{x^3}{e^x}\right) \\ &\underset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} \infty\cdot(1-0) \quad \left(\because\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0\right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

である．よって

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \boldsymbol{\infty}$$ ……(答)

である．

(4) 方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の個数に一致する．ここで，(2) と (3) および $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$ により，曲線 $y=f(x)$ は下図のようになる．



よって，実数解の個数は

$\boldsymbol{k}$	$\cdots$	**0**	$\cdots$	**1**	$\cdots$	$\boldsymbol{e-1}$	$\cdots$
個数	**0**	**1**	**2**	**2**	**3**	**2**	**1**

……(答)

である．