不等式への応用，e^x のマクローリン展開

自然数 n に対して，関数 $g_n(x)$ を

$$g_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

と定める．e を自然対数の底とする．

(1) $x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x$ となることを示せ．

(2) $x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ となることを示せ．

(3) $x > 0$ のとき，すべての自然数 n に対して，

$$e^x > g_n(x)$$

となることを，数学的帰納法によって示せ．

(21 室蘭工大 4)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

【解答】

$$g_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad (n \text{ は自然数})$$

(1) $f_1(x) = e^x - (1+x)$ $(x > 0)$ とおく．

$$f_1{}'(x) = e^x - 1 > e^0 - 1 = 0$$

なので，$x > 0$ のとき，$f_1(x)$ は単調増加である．さらに

$$\lim_{x \to +0} f_1(x) = e^0 - (1+0) = 0$$

であるから，$x > 0$ のとき，$f_1(x) > 0$ が成り立つ．

よって，$x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x$ となる．　　……(証明終わり)

(2) $f_2(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ $(x > 0)$ とおく．

$$f_2{}'(x) = e^x - (0 + 1 + x) = f_1(x) > 0 \quad (\because \ (1))$$

なので，$x > 0$ のとき，$f_2(x)$ は単調増加である．さらに

$$\lim_{x \to +0} f_2(x) = e^0 - (1+0+0) = 0$$

であるから，$x > 0$ のとき，$f_2(x) > 0$ が成り立つ．

よって，$x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ となる．　　……(証明終わり)

(3) $x > 0$ のとき，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$e^x > g_n(x) \qquad \cdots\cdots (*)$$

となることを数学的帰納法により示す．

$$
\begin{aligned}
e^x - g_n(x) &= e^x - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \\
&= e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)
\end{aligned}
$$

であり，$n = 1,\ 2$ のとき，これは (1)，(2) の $f_1(x),\ f_2(x)$ である．

$$f_n(x) = e^x - g_n(x) \quad (x > 0)$$

とおく．

(i) $n = 1$ のとき，(1) より $e^x > 1 + x$ なので，$n = 1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．
(ii) $n = m$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する．

$$
\begin{aligned}
{f_{m+1}}'(x) &= (e^x)' - {g_{m+1}}'(x) \\
&= e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\right)' \\
&= e^x - \left(0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!}\right) \\
&= e^x - g_m(x) \\
&= f_m(x) \\
&> 0 \quad (\because \text{ 帰納法の仮定})
\end{aligned}
$$

$x > 0$ のとき，$f_{m+1}(x)$ は単調増加である．さらに

$$\lim_{x \to +0} f_{m+1}(x) = e^0 - (1 + 0 + \cdots + 0) = 0$$

であるから，$x > 0$ のとき，$f_{m+1}(x) > 0$ となり，$n = m + 1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つ．　……(証明終わり)